

Seria repetytoriów dla szkół średnich

MATEMATYKA

KOREPETYCJE GIMNAZJALISTY



**GIM
TEST
OK!**

TWÓJ DOMOWY NAUCZYCIEL

ADAM KONSTANTYNOWICZ

MATEMATYKA

KOREPETYCJE GIMNAZJALISTY

OLDSCHOOL

• STARA DOBRASZKÓŁA •

Redaktor serii: **Marek Jannasz**

Redakcja: **Inga Linder-Kopiecka**

Korekta: **Marek Kowalik**

Projekt okładki: **Teresa Chylińska-Kur, KurkaStudio**

Projekt makiety i opracowanie graficzne: **Kaja Mikoszevska**

© Copyright by Wydawnictwo Lingo sp. j., Warszawa 2014

www.gimtestOK.pl

ISBN: 978-83-7892-153-0

ISBN wydania elektronicznego: 978-83-7892-215-5

Skład i łamanie: Kaja Mikoszevska

MATEMATYKA

KOREPETYCJE GIMNAZJALISTY

LICZBY WYMIERNE

POTĘGI I PIERWIASTKI

PROCENTY

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE

RÓWNANIA

WYKRESY FUNKCJI

STATYSTYKA OPISOWA

I WPROWADZENIE DO RACHUNKU

PRAWDOPODOBIENSTWA

FIGURY PŁASKIE

BRYŁY

„Korepetycje z matematyki” to publikacja dostosowana do potrzeb uczniów gimnazjum klas I–III i opracowana zgodnie z nową podstawą programową.

Książka jest napisana przystępnym językiem, ułatwiającym zrozumienie i zapamiętanie materiału. Najważniejsze treści zilustrowano licznymi wyjaśniającymi przykładami, istotne informacje ujęto w widoczny sposób. Jej czytelny podział i przejrzysta szata graficzna wpływają na lepszy odbiór przyswajanej wiedzy.

„Korepetycje z matematyki” zawierają 9 rozdziałów podanych zgodnie z kolejnością w podstawie programowej:

1. Liczby wymierne;
2. Potęgi i pierwiastki;
3. Procenty;
4. Wyrażenia algebraiczne;
5. Równania;
6. Wykresy funkcji;
7. Statystyka;
8. Figury płaskie;
9. Bryły.

Na początku każdego działu znajdują się zagadnienia teoretyczne wraz z odpowiednimi rozwiązanymi przykładami. Po treściach teoretycznych zamieszczone są: najważniejsze informacje do zapamiętania ujęte w danym rozdziale (część **Zapamiętaj**), ciekawostka nawiązująca do omawianych treści (część **Ciekawostka**) oraz zadania sprawdzające wiedzę i umiejętności z omawianego działu (część **Sprawdź się**).

Zadania zostały opracowane zgodnie z nową formułą egzaminu gimnazjalnego obowiązującą od 2012 r. Na końcu każdego działu zamieszczono rozwiązania i wskazówki do wszystkich zadań z zestawów **Sprawdź się**. Pozwolą one wyjaśnić wątpliwości lub naprowadzą na właściwe rozwiązanie zadania.

„Korepetycje z matematyki” są znakomitym uzupełnieniem podręczników do matematyki w gimnazjum. Mogą być wykorzystane przez nauczycieli i uczniów na lekcjach matematyki, na zajęciach dodatkowych w klasach I–III gimnazjum oraz przez uczniów samodzielnie przygotowujących się do prac klasowych i sprawdzianów.

Dzięki tej publikacji lepiej i łatwiej przygotujesz się również do egzaminu gimnazjalnego z matematyki.

Powodzenia
Adam Konstantynowicz

Wstęp	3
-------	---

ROZDZIAŁ 1.

LICZBY WYMIERNE 9

1. Liczby naturalne i całkowite	10
2. Rzymski sposób zapisywania liczb	11
3. Liczby wymierne dodatnie	13
4. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie)	20
<i>Sprawdź się</i>	26

ROZDZIAŁ 2.

POTĘGI I PIERWIĄSTKI 33

1. Potęga o wykładniku naturalnym	34
Określenie	34
Zapisywanie iloczynów o jednakowych czynnikach w postaci potęg	34
Zapisywanie liczb w postaci potęg	35
Obliczanie potęg liczb wymiernych	35
Iloczyn i iloraz potęg o tej samej podstawie	35
Potęgowanie iloczynu, ilorazu i potęgi	36
2. Potęga o wykładniku całkowitym ujemnym	37
3. Notacja wykładnicza	38
4. Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń zawierających potęgi	38
5. Pierwiastek kwadratowy i sześcienny	39
Pierwiastek kwadratowy	39
Określenie	39
Obliczanie pierwiastków kwadratowych liczb nieujemnych	39
Określenie	40
Obliczanie pierwiastków sześciennych z liczb	40
Pierwiastek z iloczynu, iloczyn pierwiastków	40
Pierwiastek z ilorazu, iloraz pierwiastków	41
Obliczanie wartości liczbowych wyrażeń zawierających pierwiastki	42
Wylączanie czynnika przed znak pierwiastka	42
Szacowanie wyrażeń zawierających pierwiastki	43
Działania na potęgach i pierwiastkach	44
Działania na potęgach i pierwiastkach w wyrażeniach algebraicznych	44
<i>Sprawdź się</i>	46

ROZDZIAŁ 3.

PROCENTY 55

1. Pojęcie procentu	56
2. Obliczanie procentu danej liczby	57
3. Obliczanie liczby, gdy ma się dany jej procent	59
4. Obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba	61
5. Procenty w zadaniach tekstowych	62
Obliczenia procentowe do rozwiązywania problemów w kontekście praktycznym	
– obniżki, podwyżki	62
Obliczenia procentowe – VAT	63
Obliczenia procentowe – lokaty	64
Obliczenia procentowe – stężenia	65
6. Pojęcie promila	65
<i>Sprawdź się</i>	69

ROZDZIAŁ 4.

WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE 77

1. Wyrażenie algebraiczne i jego wartość liczbowa	78
2. Sumy algebraiczne	81
<i>Sprawdź się</i>	88

ROZDZIAŁ 5.

RÓWNANIA 97

1. Rozwiązywanie równań	98
2. Zadania tekstowe na zastosowanie równań	103
3. Przekształcanie wzorów	107
4. Układy równań	108
5. Zadania tekstowe na zastosowanie układów równań	114
<i>Sprawdź się</i>	120

ROZDZIAŁ 6.
WYKRESY FUNKCJI **135**

- | | |
|----------------------------|-----|
| 1. Układ współrzędnych | 136 |
| 2. Funkcje i ich własności | 137 |
| <i>Sprawdź się</i> | 146 |

ROZDZIAŁ 7.
STATYSTYKA OPISOWA
I WPROWADZENIE DO RACHUNKU
PRAWDOPODOBIEŃSTWA **153**

- | | |
|--|-----|
| 1. Odczytywanie i interpretowanie danych przedstawionych w postaci diagramów, wykresów i tabel | 154 |
| 2. Przedstawianie danych tabelarycznie, za pomocą diagramów i wykresów | 158 |
| 3. Średnia arytmetyczna i mediana zestawu danych | 159 |
| 4. Proste doświadczenia losowe oraz prawdopodobieństwo zdarzeń | 161 |
| <i>Sprawdź się</i> | 164 |

ROZDZIAŁ 8.
FIGURY PŁASKIE **173**

- | | |
|-----------------------------------|-----|
| 1. Podstawowe figury geometryczne | 174 |
| 2. Wielokąty i ich własności | 178 |
| 3. Pola figur | 183 |
| 4. Trójkąty prostokątne | 187 |
| 5. Figury przystające | 192 |
| 6. Symetria względem prostej | 196 |
| 7. Symetria względem punktu | 201 |
| 8. Koło i okrąg | 202 |
| 9. Figury podobne | 211 |
| <i>Sprawdź się</i> | 216 |

ROZDZIAŁ 9.
BRYŁY **225**

- | | |
|-----------------------|-----|
| 1. Graniastopy proste | 226 |
| 2. Ostrostopy | 232 |
| 3. Walec | 236 |
| 4. Słożek | 238 |
| 5. Kula | 240 |
| <i>Sprawdź się</i> | 243 |

LICZBY WYMIERNE (dodatnie i niedodatnie)

„Liczba jest istotą wszystkich rzeczy”. Te słowa Pitagorasa, wypowiedziane około 30 tysięcy lat po tym, gdy prawdopodobnie zaczęto po raz pierwszy używać liczb, są jak najbardziej słuszne. Wprowadzanie nazw zbiorów liczb następowało stopniowo, a prace matematyków nad teorią liczb trwają do dzisiaj. Liczby przedstawione w tym rozdziale to tylko wierzchołek góry lodowej.

1. Liczby naturalne i całkowite

Liczbami naturalnymi są liczby: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11...

Do zapisywania liczb naturalnych używamy dziesięciu znaków zwanych cyframi. Są to: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Liczby 243 i 342 zawierają te same cyfry, ale nie są równe. Znaczenie cyfry w liczbie zależy od miejsca (pozycji), na którym się znajduje, dlatego taki sposób zapisu liczb nazywamy systemem pozycyjnym.

Wśród liczb naturalnych istnieje liczba najmniejsza. Jest to liczba 0. Nie istnieje natomiast liczba największa.

Liczby naturalne służą m.in. do numerowania i do liczenia przedmiotów. Do odczytywania temperatury w zimie albo wielkości zadłużenia potrzebne są nam liczby ujemne, czyli mniejsze od 0.

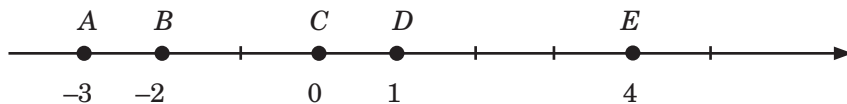
Liczby 0, 1, 2, 3... oraz -1 , -2 , -3 ... to liczby całkowite.

Liczby możemy przedstawiać na osi liczbowej, czyli prostej, na której ustalono zwrot, obrano punkt zerowy i ustalono jednostkę odległości. Liczby odpowiadające zaznaczonym punktom na osi liczbowej nazywamy ich współrzędnymi.

PRZYKŁAD 1

Zaznacz na osi liczbowej punkty o współrzędnych -3 , -2 , 0, 1, 4.

Rozwiązanie



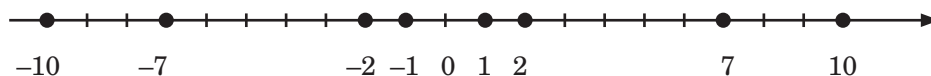
Punkt A ma współrzędną -3 , punkt B ma współrzędną -2 , punkt C ma współrzędną 0, punkt D ma współrzędną 1, punkt E ma współrzędną 4.

Liczby -1 i 1, 2 i -2 , 3 i -3 ... to pary liczb przeciwnych. Takim liczbom odpowiadają punkty leżące na osi liczbowej po przeciwnych stronach punktu zerowego i w tej samej odległości od niego.

PRZYKŁAD 2

Zaznacz na osi liczbowej punkty odpowiadające liczbom przeciwnym: -1 i 1 , 2 i -2 , 7 i -7 , -10 i 10 .

Rozwiązanie



Na osi liczbowej na prawo od 0 leżą liczby dodatnie, zaś na lewo – liczby ujemne. Liczba 0 nie jest ani liczbą dodatnią, ani liczbą ujemną.

Porównując liczby całkowite, warto pamiętać, że każda liczba dodatnia jest zawsze większa od każdej liczby ujemnej. Również liczba 0 jest większa od każdej liczby ujemnej. Z dwóch liczb ujemnych większa zaś jest ta liczba, która odpowiada punktowi leżącemu bliżej 0 na osi liczbowej.

PRZYKŁAD 3

Porównaj liczby całkowite: a) 6 i -3 ; b) -7 i -2 ; c) 0 i -6 .

Rozwiązanie

- a) $6 > -3$, bo każda liczba dodatnia jest większa od każdej liczby ujemnej;
- b) $-7 < -2$, bo punkt o współrzędnej -2 leży bliżej 0;
- c) $0 > -6$, bo liczba 0 jest większa od każdej liczby ujemnej.

2. Rzymski sposób zapisywania liczb

System rzymski zapisywania liczb wykorzystuje cyfry pochodzenia etruskiego, które Rzymianie przejęli i zmodyfikowali ok. 500 r. p.n.e. Jest on wygodny przy zapisie liczb naturalnych, lecz nie można w nim zapisywać ułamków oraz wykonywać pisemnych działań matematycznych.

Dzisiaj system rzymski używany jest do: numeracji wieków, tomów, ksiąg, rozdziałów, imion panujących władców, do zapisywania numerów szkół (np. liceów ogólnokształcących).

Do zapisu liczb w systemie rzymskim używa się siedmiu cyfr: I, V, X, L, C, D, M. Poszczególne cyfry oznaczają: I – 1, V – 5, X – 10, L – 50, C – 100, D – 500, M – 1000.

Przy zapisywaniu lub odczytywaniu liczb w systemie rzymskim należy pamiętać, że jeżeli znak oznaczający mniejszą liczbę stoi po prawej stronie znaku oznaczającego większą liczbę, to stosujemy dodawanie, a jeśli po lewej stronie, to odejmowanie.

PRZYKŁAD 1

Odczytaj liczby zapisane w systemie rzymskim.

a) XI; b) XXVII; c) XCIX; d) CM.

Rozwiązanie

a) $XI = 10 + 1 = 11$;

b) $XXVII = 2 \cdot 10 + 5 + 2 \cdot 1 = 20 + 7 = 27$;

c) $XCIX = [100 + (10 - 1)] - 10 = (100 + 9) - 10 = 109 - 10 = 99$;

lub $XCIX = (100 - 10) + (10 - 1) = 90 + 9 = 99$;

d) $CM = 1000 - 100 = 900$.

Należy pamiętać, że obok siebie zapisujemy co najwyżej trzy jednakowe znaki.

PRZYKŁAD 2

Zamień liczby zapisane w systemie dziesiętkowym na zapisane w systemie rzymskim.

a) 12; b) 135; c) 1579; d) 2850.

Rozwiązanie

a) $12 = XII$;

b) $135 = CXXXV$;

c) $1579 = MDLXXIX$;

d) $2850 = MMDCCCL$.

3. Liczby wymierne dodatnie

Ułamkiem zwykłym (np. $\frac{1}{3}$) nazywamy iloraz dwóch liczb całkowitych, z których dzielna jest licznikiem, dzielnik mianownikiem, a kreska ułamkowa zastępuje znak dzielenia. Mianownik musi być liczbą różną od 0.

Wśród ułamków wyróżniamy ułamki właściwe i niewłaściwe.

Ułamki właściwe (np. $\frac{2}{7}$) to te, w których licznik jest mniejszy od mianownika. Są one mniejsze od 1.

Ułamki niewłaściwe (np. $\frac{12}{5}$, $\frac{7}{7}$) to te, w których licznik jest większy od mianownika lub równy mianownikowi. Są one większe od 1 lub równe 1.

Liczby w postaci $1\frac{1}{5}$, $4\frac{7}{8}$, $9\frac{1}{2}$ to liczby mieszane.

Skracaniem ułamka nazywamy czynność polegającą na podzieleniu jego licznika i mianownika przez tę samą liczbę różną od 0, np. $\frac{24}{36} = \frac{24 : 12}{36 : 12} = \frac{2}{3}$.

Rozszerzanie ułamka to czynność polegająca na pomnożeniu licznika i mianownika przez tę samą liczbę różną od 0, np. $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12}$.

Każde dwa ułamki możemy porównać. Porównując dwa ułamki zwykłe, zazwyczaj doprowadzamy je do ułamków o równych mianownikach lub równych licznikach, np. $\frac{5}{6} > \frac{1}{4}$, bo $\frac{10}{12} > \frac{3}{12}$; $\frac{4}{51} < \frac{10}{73}$, bo $\frac{20}{255} < \frac{20}{146}$.

Najprościej dodaje się lub odejmuje ułamki o jednakowych mianownikach. Wystarczy dodać lub odjąć liczniki, a mianownik pozostawić bez zmian, np. $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$; $\frac{9}{11} - \frac{3}{11} = \frac{6}{11}$.

Aby dodać lub odjąć ułamki o różnych mianownikach, należy najpierw sprowadzić je do wspólnego mianownika, następnie dodać lub odjąć liczniki, a mianownik pozostawić bez zmian.

PRZYKŁAD 1

Wykonaj działania: a) $\frac{5}{6} + \frac{3}{8}$; b) $6\frac{1}{9} - 2\frac{7}{12}$.

Rozwiązanie

$$\text{a) } \frac{5}{6} + \frac{3}{8} = \frac{20}{24} + \frac{9}{24} = \frac{29}{24} = 1\frac{5}{24}; \quad \text{b) } 6\frac{1}{9} - 2\frac{7}{12} = 6\frac{4}{36} - 2\frac{21}{36} = 5\frac{40}{36} - 2\frac{21}{36} = 3\frac{19}{36}.$$

Odpowiedź: $\frac{5}{6} + \frac{3}{8} = 1\frac{5}{24}$; $6\frac{1}{9} - 2\frac{7}{12} = 3\frac{19}{36}$.

Ułamki zwykłe również mnożymy i dzielimy, trzeba pamiętać o różnych sposobach wykonywania tych działań. Aby pomnożyć ułamek przez liczbę całkowitą, należy pomnożyć licznik tego ułamka przez tę liczbę, a mianownik pozostawić bez zmian. Iloczyn ułamków jest ułamkiem, którego licznik jest iloczynem liczników, a mianownik iloczynem mianowników. Gdy czynnik jest liczbą mieszaną, zazwyczaj zamieniamy tę liczbę na ułamek niewłaściwy i wykonujemy mnożenie. Przy mnożeniu liczników oraz mianowników warto pamiętać o możliwości skracania.

PRZYKŁAD 2

Oblicz: a) $\frac{4}{5} \cdot 15$; b) $\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{36}$; c) $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3}$.

Rozwiązanie

$$\text{a) } \frac{4}{5} \cdot 15 = \frac{4 \cdot \overset{3}{\cancel{15}}}{\underset{1}{5}} = 12; \quad \text{b) } \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{36} = \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{\underset{3}{\cancel{15}} \cdot \underset{9}{\cancel{36}}} = \frac{2}{27};$$

$$\text{c) } 2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3} = \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{3} = \frac{\overset{5}{\cancel{5}} \cdot \overset{2}{\cancel{10}}}{\underset{1}{2} \cdot \underset{3}{\cancel{3}}} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$$

Odpowiedź: $\frac{4}{5} \cdot 15 = 12$; $\frac{8}{15} \cdot \frac{5}{36} = \frac{2}{27}$; $2\frac{1}{2} \cdot 3\frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$.

Mnożenie ułamków stosujemy na przykład przy obliczaniu ułamka danej liczby. Np. $\frac{3}{4}$ liczby 60 = $\frac{3}{4} \cdot 60 = 45$.

Gdy iloczyn dwu liczb jest równy 1, to mówimy, że jedna z nich jest odwrotnością drugiej, zatem odwrotnością liczby $a \neq 0$ jest liczba $\frac{1}{a}$.

Odwrotnością ułamka $\frac{a}{b}$ jest ułamek $\frac{b}{a}$, gdzie $a \neq 0$ i $b \neq 0$, np. odwrotnością liczby $\frac{5}{7}$ jest liczba 1,4.

Aby podzielić ułamek przez ułamek, mnożymy pierwszy ułamek przez odwrotność drugiego, np. $\frac{7}{8} : \frac{3}{4} = \frac{7}{8} \cdot \frac{4}{3} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$.

Dzielenie ułamków wykorzystujemy na przykład przy wyznaczaniu liczby z danego jej ułamka.

Ułamki zwykłe, które w mianowniku mają 10, 100, 1000, ..., nazywamy ułamkami dziesiętnymi. Możemy je zapisać w postaci dziesiętnej, tzn. bez kreski ułam-

kowej, z zastosowaniem przecinka oddzielającego część całkowitą od części ułamkowej, np. $\frac{23}{1000} = 0,023$.

Dodawanie i odejmowanie ułamków dziesiętnych wykonujemy tak, jak dodawanie i odejmowanie liczb naturalnych. Proste rachunki wykonujemy w pamięci, a bardziej skomplikowane sposobem pisemnym, pamiętając, aby wszystkie przecinki zapisać w jednej kolumnie.

PRZYKŁAD 3

Wykonaj obliczenia sposobem pisemnym.

a) $1,357 + 24,9 + 0,67$; b) $10,2 - 3,81$.

Rozwiązanie

a)

			1	3	5	7	
		2	4	9	0	0	
	+		0	6	7	0	
		2	6	9	2	7	

b)

		1	0	2	0	
	-		3	8	1	
			6	3	9	

Odpowiedź: $1,357 + 24,9 + 0,67 = 26,927$; $10,2 - 3,81 = 6,39$.

Przy mnożeniu ułamka dziesiętnego przez 10, 100, 1000... przesuwamy przecinek w tym ułamku w prawo odpowiednio o jedno, dwa, trzy... miejsca, np. $3,241 \cdot 100 = 324,1$.

Przy dzieleniu ułamka dziesiętnego przez 10, 100, 1000... przesuwamy przecinek w tym ułamku w lewo odpowiednio o jedno, dwa, trzy... miejsca, np. $650,2 : 1000 = 0,6502$.

Mnożąc ułamki dziesiętne sposobem pisemnym, zapisujemy je tak, jak w mnożeniu liczb naturalnych, nie zwracając uwagi na położenie przecinka, a w iloczynie oddzielamy przecinkiem od prawej strony (od końca) tyle cyfr, ile jest łącznie po przecinkach w obu czynnikach.

Dzieląc ułamek dziesiętny przez liczbę naturalną, postępujemy tak samo, jak przy dzieleniu liczb naturalnych, a przecinek w ilorazie zapisujemy nad przecinkiem dzielnej.

Przy dzieleniu liczby przez ułamek dziesiętny należy przesunąć przecinek w dzielnej i dzielniku o tyle miejsc, aby dzielnik stał się liczbą naturalną, a następnie wykonać to dzielenie.

PRZYKŁAD 4

Oblicz sposobem pisemnym: a) $15,23 \cdot 3,6$; b) $25,6 : 0,25$.

Rozwiązanie

a)

			1	5	,	2	3
		.				3	,6
			9	1	3	8	
+	4	5	6	9			
	5	4	,	8	2	8	

b) $25,6 : 0,25 = 2560 : 25$

			1	0	2	,	4
		2	5	6	0	:	25
-	2	5					
			6	0			
			-	5	0		
				1	0	0	
			-	1	0	0	
					0		

Odpowiedź: $15,23 \cdot 3,6 = 54,828$; $25,6 : 0,25 = 102,4$.

Jeżeli każdy ułamek zwykły traktujemy jako iloraz dwóch liczb całkowitych, to możemy wykonać dzielenie licznika tego ułamka przez jego mianownik. Wynikiem tego dzielenia jest ułamek dziesiętny.

Ułamek zwykły może mieć rozwinięcie dziesiętne skończone lub rozwinięcie dziesiętne nieskończone.

Znajdź rozwinięcia dziesiętne ułamków: a) $\frac{3}{8}$; b) $\frac{5}{11}$.

Rozwiązanie na stronie obok

a)

	0	3	7	5	
	3	:	8		
−	0				
	3	0			
−	2	4			
	6	0			
	−	5	6		
		4	0		
		−	4	0	
			0		

b)

	0	4	5	4	5	...
	5	:	1	1		
-	0					
	5	0				
-	4	4				
		6	0			
		-	5	5		
			5	0		
			-	4	4	
				6	0	
				-	5	5
					5	0

Ułamki zwykłe o rozwinięciu dziesiętnym skończonym możemy zamieniać na ułamki dziesiętne, rozszerzając lub skracając je tak, aby w mianowniku była liczba 10, 100, 1000, np. $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$; $\frac{27}{300} = \frac{9}{100}$.

Jeżeli pierwsza z odrzucanych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest mniejsza od 5, to ostatnią zachowaną cyfrę zostawiamy bez zmian i podajemy przybliżenie liczby

z niedomiarem. Jeżeli zaś pierwsza z odrzucanych cyfr rozwinięcia dziesiętnego jest większa lub równa 5, to ostatnią zachowaną cyfrę powiększamy o 1 i podajemy przybliżenie liczby z nadmiarem.

PRZYKŁAD 6

Podaj przybliżenie liczby 23,1483517 z dokładnością do

a) części tysięcznych; b) części setnych

i określ, czy jest ono z niedomiarem czy z nadmiarem.

Rozwiązanie

a) $23,1483517 \approx 23,148$ z niedomiarem;

b) $23,1483517 \approx 23,15$ z nadmiarem.

Czasami w życiu codziennym kierujemy się zasadami zaokrąglania innymi niż matematyczne. Mówimy wówczas o szacowaniu. W sklepie zastanawiamy się, czy kwota, którą posiadamy, wystarczy nam na zakup zaplanowanych produktów, szacujemy wtedy ich wartość, stosując przybliżenia z nadmiarem.

Obliczając wartość wyrażenia arytmetycznego, korzystamy z własności działań:

- przemienności dodawania: $a + b = b + a$;
- łączności dodawania: $(a + b) + c = a + (b + c)$;
- przemienności mnożenia: $a \cdot b = b \cdot a$;
- łączności mnożenia: $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
- rozdzielności mnożenia względem dodawania: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$.

Pamiętajmy o tym, że:

- dodając 0, nie zmieniamy wartości wyrażenia: $a + 0 = a$;
- mnożąc przez 1, nie zmieniamy wartości wyrażenia: $a \cdot 1 = a$;
- gdy jednym z czynników iloczynu jest 0, to iloczyn wynosi 0.

Przy obliczaniu wartości liczbowej wyrażenia arytmetycznego należy pamiętać o kolejności wykonywania działań. Jeżeli w wyrażeniu występuje tylko dodawanie i odejmowanie albo tylko mnożenie i dzielenie, to wykonujemy je w kolej-

ności od lewej do prawej. Gdy w wyrażeniu występuje dodawanie, odejmowanie, mnożenie lub dzielenie, to najpierw wykonujemy mnożenie i dzielenie, a potem dodawanie i odejmowanie. W wyrażeniach zawierających nawiasy najpierw wykonujemy działania w tych nawiasach, które nie zawierają innych nawiasów. Zastępując znak dzielenia kreską ułamkową, traktujemy wyrażenia w liczniku i mianowniku tak, jakby były ujęte w nawiasy.

Wykonując obliczenia, w których występują ułamki zwykłe i dziesiętne, możemy ułamki dziesiętne zamieniać na ułamki zwykłe lub – o ile to możliwe – zamieniać ułamki zwykłe na dziesiętne, a następnie wykonywać działania zgodnie z kolejnością.

PRZYKŁAD 7

Oblicz wartości wyrażeń:

a) $24 - 8 + 2 + 3 - 11$;

b) $3 \cdot 8 : 2 : 4 \cdot 7$;

c) $2,6 + 8,4 : 1,2 - 0,1 \cdot 6$;

d) $\frac{2}{5} \cdot (6 - 20 : (4 + 1))$;

e) $\frac{15 : (-3) + 7}{-2}$;

f) $\frac{2}{3} - (0,6 \cdot \frac{5}{6} - 1,4) : (-2,7)$.

Rozwiązanie

a) $24 - 8 + 2 + 3 - 11 = 16 + 2 + 3 - 11 = 18 + 3 - 11 = 21 - 11 = 10$;

b) $3 \cdot 8 : 2 : 4 \cdot 7 = 24 : 2 : 4 \cdot 7 = 12 : 4 \cdot 7 = 3 \cdot 7 = 21$;

c) $2,6 + 8,4 : 1,2 - 0,1 \cdot 6 = 2,6 + 7 - 0,6 = 9,6 - 0,6 = 9$;

d) $\frac{2}{5} \cdot (6 - 20 : (4 + 1)) = \frac{2}{5} \cdot (6 - 20 : 5) = \frac{2}{5} \cdot (6 - 4) = \frac{2}{5} \cdot 2 = \frac{4}{5}$;

e) $\frac{15 : (-3) + 7}{-2} = \frac{-5 + 7}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$;

f) $\frac{2}{3} - (0,6 \cdot \frac{5}{6} - 1,4) : (-2,7) = \frac{2}{3} - (\frac{6}{10} \cdot \frac{5}{6} - 1,4) : (-2,7) =$
 $= \frac{2}{3} - (0,5 - 1,4) : (-2,7) = \frac{2}{3} - (-0,9) : (-2,7) = \frac{2}{3} - (-\frac{9}{10}) : (-\frac{27}{10}) =$
 $= \frac{2}{3} - (-\frac{9}{10}) \cdot (-\frac{10}{27}) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

4. Liczby wymierne (dodatnie i niedodatnie)

Każdą liczbę, którą da się przedstawić w postaci ułamka zwykłego, o liczniku będącym dowolną liczbą całkowitą i mianowniku będącym liczbą całkowitą różną od 0, nazywamy liczbą wymierną.

Liczbami wymiernymi są np. liczby: $-\frac{2}{3}$, $-\frac{5}{8}$, $-1,3$, 0 , $\frac{1}{4}$, $\frac{17}{49}$, $6\frac{1}{3}$, 9 , $18,15$.

Liczby te mają rozwinięcie dziesiętne skończone lub nieskończone okresowe. Każdą z nich można przedstawić w postaci ułamka zwykłego na nieskończenie wiele sposobów.

PRZYKŁAD 1

Zapisz liczby wymierne:

a) 5; b) 0; c) -6 ; d) $0,8$; e) $-2\frac{1}{3}$; f) $-8,4$.

w postaci ułamków.

Rozwiązanie

$$\text{a) } 5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \dots;$$

$$\text{b) } 0 = \frac{0}{2} = \frac{0}{-6} = \frac{0}{21} = \dots;$$

$$\text{c) } -6 = \frac{-6}{1} = \frac{12}{-2} = \frac{-84}{14} = \dots;$$

$$\text{d) } 0,8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} = \frac{28}{35} = \dots;$$

$$\text{e) } -2\frac{1}{3} = -\frac{7}{3} = \frac{-35}{15} = \frac{70}{-30} = \dots;$$

$$\text{f) } -8,4 = \frac{-84}{10} = \frac{42}{-5} = \frac{-126}{15} = \dots$$

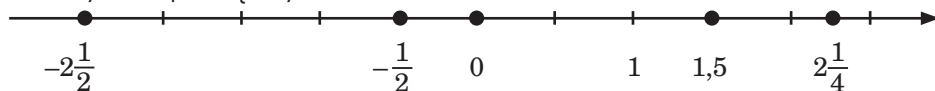
Porównując liczby, często wykorzystujemy położenie na osi liczbowej punktów o odpowiadających im współrzędnych.

PRZYKŁAD 2

Uporządkuj rosnąco liczby: $-2\frac{1}{2}$, $1,5$, 0 , $2\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$.

Rozwiązanie

Rysujemy oś liczbową, obieramy jednostkę i zaznaczamy punkty o danych współrzędnych.



Odpowiedź: $-2\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} < 0 < 1,5 < 2\frac{1}{4}$.

Odległość pomiędzy dwoma punktami leżącymi na osi liczbowej możemy obliczać, odejmując ich współrzędne.

PRZYKŁAD 3

Oblicz odległość między punktami o współrzędnych:

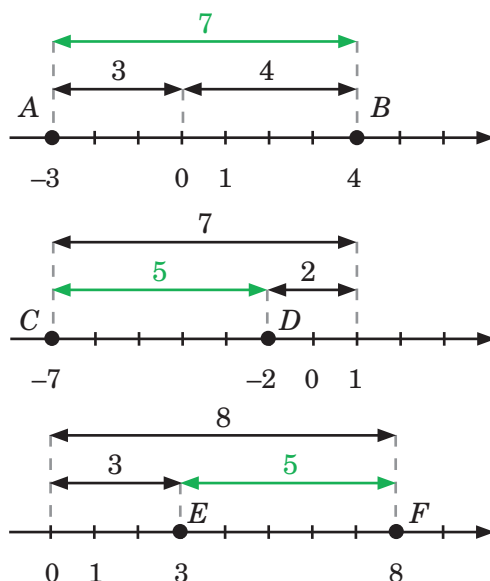
a) -3 i 4 ; b) -7 i -2 ; c) 3 i 8 .

Rozwiązanie

a) $|AB| = 4 - (-3) = 7$;

b) $|CD| = -2 - (-7) = 5$;

c) $|EF| = 8 - 3 = 5$.



Na osi liczbowej możemy zaznaczać liczby oraz zbiory liczb. Jeżeli chcemy wśród liczb podać te, które są np. większe od 4, to nie możemy wymienić ich wszystkich, bo jest ich nieskończenie wiele. Zbiór ten zaznaczamy na osi liczbowej.

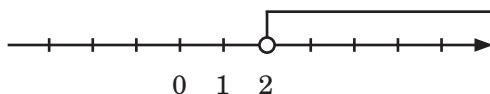
PRZYKŁAD 4

Zaznacz na osi liczbowej zbiory liczb spełniających określone warunki.

a) $x > -2$; b) $x < 4$; c) $x \geq 3$; d) $x \leq -1$.

Rozwiązanie

a) $x > -2$;



b) $x < 4$;

