

ISBN 978-83-940726-0-5

**Tadeusz Socha**

# **Matura z matematyki**

**na poziomie rozszerzonym**

**tom I**

**powtórzenie przed maturą**

**wydanie drugie  
poprawione i uzupełnione**

**teoria  
+  
zadania  
+  
rozwiązania**

**matura od 2015 roku**

**Tadeusz Socha**

# **Matura z matematyki na poziomie rozszerzonym**

**tom I**

**powtórzenie do matury**

**wydanie drugie, poprawione i uzupełnione**

**matura od 2015 roku**

© Copyright by Socha Tadeusz, 2014

ISBN 978-83-940726-0-5

[www.maturzysta.info](http://www.maturzysta.info)

e-mail: [tadesor@gmail.com](mailto:tadesor@gmail.com)

Opracowanie edytorskie i projekt okładki: Socha Tadeusz

Wszelkie prawa zastrzeżone. Rozpowszechnianie i kopiowanie całości lub części publikacji  
zabronione bez pisemnej zgody autora.

## Tytułem wstępu.

Powtórzenie do matury na poziomie rozszerzonym zawiera wiedzę teoretyczną wymaganą na egzaminie maturalnym, popartą przykładowymi, rozwiązanymi zadaniami (jest ich 664).

Wiadomości teoretyczne nie są powieleniem treści zawartych w podręcznikach szkolnych. Zostały one zapisane w taki sposób, aby były pomocne w zrozumieniu materiału wymaganego na maturze. Ich układ nie pokrywa się z kolejnością „działów” matematyki, na jakie zazwyczaj dzielą wiedzę matematyczną autorzy podręczników.

Ważne jest, by po przeczytaniu materiału teoretycznego spróbować najpierw samodzielnie rozwiązać przykładowe zadania, a dopiero potem przeanalizować podane rozwiązania. Takie postępowanie w sposób istotny podniesie umiejętności i rozszerzy wiedzę matematyczną czytelnika.

## Spis treści

| L.p. | Temat                                                                          | Str. |
|------|--------------------------------------------------------------------------------|------|
| 1    | Logika, czyli podstawy poprawnego rozumowania.                                 | 4    |
| 2    | Podstawy arytmetyki.                                                           | 19   |
| 3    | Zbiory i działania na zbiorach. Zbiory liczbowe.                               | 31   |
| 4    | Ogólne własności funkcji.                                                      | 43   |
| 5    | Równania prostej na płaszczyźnie.                                              | 56   |
| 6    | Funkcja kwadratowa i związane z nią zagadnienia.                               | 69   |
| 7    | Wielomiany.                                                                    | 84   |
| 8    | Funkcje i wyrażenia wymierne.                                                  | 100  |
| 9    | Algebraiczne i graficzne rozwiązywanie równań i nierówności.                   | 114  |
| 10   | Ciągi liczbowe – podstawy.                                                     | 138  |
| 11   | Ciągi: arytmetyczny i geometryczny.                                            | 148  |
| 12   | Granica ciągu liczbowego. Suma szeregu geometrycznego.                         | 161  |
| 13   | Potęgi i pierwiastki.                                                          | 181  |
| 14   | Funkcje potęgowe i wykładnicze.                                                | 191  |
| 15   | Logarytmy i funkcje logarytmiczne.                                             | 202  |
| 16   | Podstawy geometrii płaszczyzny.                                                | 213  |
| 17   | Przekształcenia geometryczne na płaszczyźnie.                                  | 234  |
| 18   | Trygonometria w trójkącie prostokątnym. Zastosowanie w geometrii.              | 246  |
| 19   | Trygonometria kąta skierowanego.                                               | 260  |
| 20   | Podstawowe figury geometryczne i ich własności.                                | 278  |
| 21   | Pola figur płaskich.                                                           | 297  |
| 22   | Podstawowe rodzaje i własności brył.                                           | 316  |
| 23   | Pola powierzchni i objętości brył.                                             | 336  |
| 24   | Geometria analityczna na płaszczyźnie.                                         | 351  |
| 25   | Zastosowanie wektorów w geometrii analitycznej.                                | 367  |
| 26   | Granica i ciągłość funkcji.                                                    | 384  |
| 27   | Pochodna funkcji. Styczna do wykresu funkcji.                                  | 398  |
| 28   | Monotoniczność i ekstrema funkcji.                                             | 415  |
| 29   | Kombinatoryka, czyli liczenie ilości.<br>Podstawy rachunku prawdopodobieństwa. | 459  |
| 30   | Prawdopodobieństwo klasyczne. Metoda drzew.                                    | 470  |
| 31   | Niezależność zdarzeń. Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite.                | 482  |
| 32   | Podstawy statystyki.                                                           | 493  |
| 33   | Tematy zadań.                                                                  | 506  |
| 34   | Jak unikać błędów? Jak pisać poprawne rozwiązania?                             | 547  |
| 35   | Przed egzaminem pamiętaj...                                                    | 555  |

# 1. Logika, czyli podstawy poprawnego rozumowania

**Logika** to nauka o poprawnym rozumowaniu.

Fakt, że tylko poprawne rozumowanie pozwala człowiekowi na podstawie dostępnych mu przesłanek wyciągać kolejne, prawdziwe wnioski, spostrzegli już starożytni. Dziś często przytacza się dokonania **Arystotelesa**, który sformułował kilka podstawowych zasad poprawnego rozumowania, na przykład:

- ✓ **Zasada sprzeczności** – „dwa twierdzenia względem siebie sprzeczne nie mogą być równocześnie prawdziwe”.
- ✓ **Zasada wyłączonego środka** – „z dwóch zdań sprzecznych jedno musi być prawdziwe, a drugie fałszywe” (trzeciego wyjścia nie ma: **tertium non datur**).

Zasady logicznego rozumowania, które wykorzystuje się do rozwiązywania problemów matematycznych nazywane są **logiką matematyczną**.

W języku matematycznym, podobnie, jak i w języku potocznym, mamy do czynienia ze zdaniami prostymi i złożonymi. W odróżnieniu od języka potocznego nie możemy sobie pozwalać na dowolność w interpretacji tych zdań. Nie może być takiej sytuacji, że wypowiedziane zdanie jest przez dwie osoby rozumiane w zupełnie odmienny sposób. Zawsze ocena danej wypowiedzi może być tylko jedna. Z tego też powodu przyjęto omówione niżej zasady.

---

## 1. Użycie spójnika „i”

Dwa zdania połączone spójnikiem „i” nazywamy **koniunkcją zdań**. Koniunkcję zdań  $p, q$  możemy zapisać na kilka sposobów:

- $p \text{ i } q$
- $p \wedge q$
- $p, q$
- $\begin{cases} p \\ q \end{cases}$

**Koniunkcję zdań  $p, q$  uznajemy za zdanie prawdziwe tylko wtedy, gdy jednocześnie są prawdziwe  $p$  oraz  $q$ .**

## Uwagi praktyczne

- ✓ Zapisanie obok siebie dwóch zdań (nawet bez oddzielającego je przecinka), to zapisanie koniunkcji. **Gdy piszemy obok siebie dwa zdania – przekazujemy tym samym informację, że są one (lub mają być) jednocześnie prawdziwe.**
  - ✓ Przykład: rozwiązując równanie  $(x - 2)(x + 3) = 0$  nie możemy pisać:  $x = 2$ ,  $x = -3$ , gdyż zmienna  $x$  nie może **jednocześnie** przyjmować dwóch różnych wartości. Należy ponumerować rozwiązania:  $x_1 = 2, x_2 = -3$  lub użyć (omówionej w dalszym tekście) **alternatywy**:  $x = 2$  **lub**  $x = -3$ .
  - ✓ **Dwa lub więcej zapisów połączonych nawiasem klamrowym jest koniunkcją.** Zapis:  $\begin{cases} 2x^2 - 6x = 7 \\ x^2 \leq 6 \end{cases}$  oznacza, że podane równanie i nierówność mają być jednocześnie spełnione. Zapisy  $2x^2 - 6x = 7$  oraz  $x^2 \leq 6$  połączone są spójnikiem „i”, czyli szukamy takich wartości  $x$ , które spełniają **jednocześnie** równanie i nierówność. Wobec tego należy rozwiązać osobno równanie i nierówność, a następnie wyznaczyć te wartości niewiadomej, które spełniają tak równanie, jak i nierówność.
- 

## 2. Użycie spójnika „lub”

Dwa zdania połączone spójnikiem „**lub**” nazywamy **alternatywą zdań**. Alternatywę zdań  $p, q$  możemy zapisać na dwa sposoby:

- $p$  **lub**  $q$
- $p \vee q$

**Alternatywę zdań  $p, q$  uznajemy za zdanie prawdziwe, gdy jest prawdziwe co najmniej jedno z nich (jedno lub obydwa).**

## Uwagi praktyczne

Nie należy mylić alternatywy „lub” z tzw. alternatywą wykluczającą: „**albo**”.

**Alternatywa wykluczająca: „ $p$  albo  $q$ ” jest zdaniem prawdziwym, gdy prawdziwe jest dokładnie jedno ze zdań (stąd jej nazwa: jedno wyklucza drugie).**

### Przykłady:

- ✓ Gdy zapiszemy  $x < 0$  **lub**  $x > 0$ , to mamy na myśli zbiór liczb rzeczywistych bez zera (bo te liczby spełniają co najmniej jedno z podanych zdań).  
Gdy zapiszemy  $x < 0$  **albo**  $x > 0$ , to mamy na myśli ten sam zbiór (bo te liczby spełniają dokładnie jedno z podanych zdań).  
Jak widać efekt „działania” spójników „lub” oraz „albo” czasami może być taki sam.

- ✓ Gdy zapiszemy  $x > -1$  **lub**  $x < 1$ , to mamy na myśli zbiór wszystkich liczb rzeczywistych (każda liczba rzeczywista spełnia co najmniej jeden z tych warunków).
  - ✓ Gdy zapiszemy  $x > -1$  **albo**  $x < 1$ , to mamy na myśli zbiór  $(-\infty, -1) \cup \langle 1, \infty)$ , bo tylko liczby z tego zbioru spełniają dokładnie jeden z podanych warunków.
- 

### 3. Użycie konstrukcji „jeżeli ... to ...”

Zdanie złożone zapisane słownie „**jeżeli p to q**” lub symbolicznie „ $p \Rightarrow q$ ” nazywamy **implikacją** zdań p, q.

Stwierdzamy w ten sposób, że jeżeli jest spełnione zdanie p, to wtedy jest również spełnione zdanie q. Wypowiadając implikację, domyślnie nie rozpatrujemy sytuacji, gdy zdanie p nie jest prawdziwe (wtedy q może sobie być jakie chce).

Wobec tego **implikacja zdań „jeżeli p to q” jest fałszywa tylko wtedy, gdy p jest prawdziwe, a q jest fałszywe.**

#### Uwagi praktyczne

- ✓ W postaci implikacji zapisywane są twierdzenia matematyczne.  
„Jeżeli trójkąt jest trójkątem prostokątnym o przyprostokątnych długości  $a$  i  $b$ , oraz przeciwprostokątnej długości  $c$ , to  $a^2 + b^2 = c^2$ ” - to znane Ci twierdzenie Pitagorasa.
  - ✓ Implikacja często nazywana jest **wynikaniem**, a o zdaniu  $p \Rightarrow q$  mówimy: „**z p wynika q**”. Dla przykładu podamy zdanie  $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$ . Jest to twierdzenie, które mówi: z faktu, iż  $x$  nie jest zerem **wynika**, że jego kwadrat jest dodatni.
- 

### 4. Użycie konstrukcji „... wtedy i tylko wtedy, gdy ...”

Zdanie złożone zapisane na jeden z trzech sposobów:

- **p wtedy i tylko wtedy, gdy q**
- **p jest równoważne q**
- $p \Leftrightarrow q$

nazywamy **równoważnością** zdań p, q.

**Równoważność zdań uznajemy za zdanie prawdziwe, gdy zachodzi jedno z dwojga:**

- obydwa zdania są prawdziwe,
- obydwa zdania są fałszywe.

## Uwagi praktyczne

- ✓ To zdanie złożone dobrze opisuje jego nazwa: **równoważność**. Zdania są równoważne: „równa waga” dwóch zdań oznacza dokładnie tyle, że wypowiadając jedno, czy drugie zdanie, wypowiadamy „**to samo, tylko w innej postaci**”. Jeżeli zapiszemy:

$$6x - 4 = x \Leftrightarrow 5x = 4$$

to stwierdzamy, że podane dwa równania poza wyglądem niczym się nie różnią: **mają taką samą dziedzinę i ten sam zbiór rozwiązań**.

- ✓ Użycie równoważności jest często stosowanym sposobem zapisywania twierdzeń matematycznych, np.: „funkcja liniowa jest funkcją rosnącą wtedy i tylko wtedy, gdy współczynnik kierunkowy w równaniu funkcji liniowej jest liczbą dodatnią”. Taki zapis oznacza, że prawdziwe są twierdzenia:  
„jeżeli funkcja liniowa jest funkcją rosnącą, to współczynnik kierunkowy w równaniu funkcji liniowej jest liczbą dodatnią”  
oraz twierdzenie odwrotne: „jeżeli współczynnik kierunkowy w równaniu funkcji liniowej jest liczbą dodatnią, to funkcja liniowa jest funkcją rosnącą”.

---

## 5. Użycie konstrukcji „dla każdego ...”

Zdanie zapisane w jednej z postaci:

- dla każdego  $x$ :  $\text{warunek}(x)$
- dla wszystkich  $x$ :  $\text{warunek}(x)$
- dla dowolnego  $x$ :  $\text{warunek}(x)$
- $\bigwedge_x \text{warunek}(x)$

(zamiast  $x$  może być użyta dowolna inna zmienna) nazywamy **kwantyfikatorem ogólnym**.

**Zdanie z kwantyfikatorem ogólnym uznajemy za prawdziwe, gdy  $\text{warunek}(x)$  jest spełniony przez wszystkie rozpatrywane wartości zmiennej  $x$ .**

## Uwagi praktyczne

- ✓ Twierdzenia matematyczne często zapisywane są za pomocą kwantyfikatora ogólnego. Przykładowo twierdzenie:

$$x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$$

można zapisać słownie:

kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny, lub:

$$\bigwedge_{x \in \mathbb{R}} x^2 \geq 0$$

---

## 6. Użycie konstrukcji „istnieje taki ..., że ...”

Zdanie zapisane w jednej z postaci:

➤ istnieje taki  $x$ , że warunek( $x$ )

➤

$$\bigvee_x \text{warunek}(x)$$

(zamiast  $x$  może być użyta dowolna inna zmienna) nazywamy **kwantyfikatorem szczegółowym**.

**Zdanie z kwantyfikatorem szczegółowym uznajemy za prawdziwe, jeżeli co najmniej jedna wartość  $x$  spełnia warunek( $x$ )** – jedna lub więcej, a w skrajnym przypadku nawet wszystkie.

### Uwagi praktyczne

✓ Gdy używamy kwantyfikatora szczegółowego, nie musimy wskazywać elementu, który jak stwierdzamy: istnieje.

Takich elementów może być wiele, może też istnieć tylko jeden. Ilość jest nieważna. Stwierdzamy tylko, że nie można powiedzieć, iż elementów spełniających podany warunek( $x$ ) nie ma.

## 7. Trudna sztuka zaprzeczania

Często musimy czemuś zaprzeczyć. Piszemy:

- $6x - 3 \neq 0$  (**nie** jest równe)
- $6x - 3 \ngeq 0$  (**nie** jest większe lub równe)
- $a \notin C$  (**nie** należy do...)

Wbrew pozorom zaprzeczanie nie jest łatwe (oczywiście - poprawne zaprzeczanie), a ilość popełnianych przy tym błędów taką opinię potwierdza.

### Zaprzeczanie koniunkcji

Rozpatrzmy koniunkcję:

$$x \in C \text{ i } x > 10$$

Kiedy podane zdanie jest fałszywe, czyli dla jakich wartości  $x$  prawdziwe jest zdanie:

„nieprawda, że  $(x \in C \text{ i } x > 10)$ ” ?

Skoro koniunkcja jest prawdziwa tylko wtedy, gdy prawdziwe są obydwa połączone spójnikiem „i” zdania, to fałszywa jest w pozostałych trzech przypadkach:

- a) gdy zachodzą:  $x \notin C, x > 10$
- b) gdy zachodzą:  $x \in C, x \neq 10$
- c) gdy zachodzą:  $x \notin C, x \neq 10$

Wobec tego, jeżeli chcemy zapisać zaprzeczenie „nieprawda, że  $(x \in C \text{ i } x > 10)$ ” w sposób bardziej przyjazny dla ucha i intuicji, robimy to następująco:

$$x \notin C \text{ lub } x \neq 10$$

Można tu sformułować ogólną zasadę:

**Zaprzeczenie koniunkcji to alternatywa zaprzeczeń.**

### *Praktyczny przykład*

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

Para liczb  $x = 2, y = 2$  spełnia podany układ równań. Oznacza to, że podana para liczb spełnia tak pierwsze, jak i drugie równanie.

Podanego układu równań nie spełniają pary liczb, które:

- nie spełniają pierwszego równania, lecz spełniają drugie równanie,
- nie spełniają drugiego równania, lecz spełniają pierwsze równanie,
- nie spełniają żadnego z tych równań.

### **Zaprzeczanie alternatywy**

Rozpatrzmy alternatywę:

$$x < 0 \text{ lub } x > 1$$

Kiedy podane zdanie jest fałszywe, czyli dla jakich wartości  $x$  prawdziwe jest zdanie:

$$\text{„nieprawda, że } (x < 0 \text{ lub } x > 1)\text{”}$$

Skoro alternatywa jest prawdziwa, gdy prawdziwe jest jedno lub obydwa zdania połączone spójnikiem „lub”, to fałszywa jest tylko wtedy, gdy obydwa zdania są fałszywe.

Wobec tego zaprzeczenie alternatywy „nieprawda, że  $(x < 0 \text{ lub } x > 1)$ ” można zapisać inaczej:

$$x \nless 0 \text{ i } x \ngtr 1$$

czyli

$$x \geq 0 \text{ i } x \leq 1$$

Podsumowując: **zaprzeczenie alternatywy to koniunkcja zaprzeczeń.**

### Praktyczny przykład

Rozwiązując równanie  $(x - 1)(x + 2) = 0$  piszemy:  $x = 1$  **lub**  $x = -2$ .

Czasami jednak, np. przy wyznaczaniu dziedziny funkcji:

$$f(x) = \frac{x}{(x - 1)(x + 2)}$$

piszemy:

$$(x - 1)(x + 2) \neq 0.$$

Wielu rozwiązujących ten warunek podaje takie rozwiązanie:

$$x \neq 1 \text{ **lub** } x \neq -2.$$

Niestety, taki zapis jest błędny: warunek  $x \neq 1$  **lub**  $x \neq -2$  spełniają wszystkie liczby rzeczywiste, bo każda spełnia co najmniej jedno z dwojga: jest różna od 1; jest różna od -2.

Przyczyną powstałego błędu jest niewłaściwe zaprzeczenie alternatywy. Zaprzeczeniem alternatywy jest koniunkcja zaprzeczeń, czyli należało zapisać:

$$x \neq 1 \text{ **i** } x \neq -2.$$

### Zaprzeczanie implikacji

Jeżeli ktoś wygłosi opinię w postaci implikacji (twierdzenie): „Jeżeli ... to ...”, powinniśmy potrafić sformułować zaprzeczenie tej opinii.

Ta umiejętność jest też potrzebna, gdy podczas rozwiązywania zadania zastanawiamy się nad słusnością wniosków, które sami wyciągamy.

Nie jest to trudne, gdyż zazwyczaj zdanie tego typu mówi, że wiele elementów ma pewną własność. **Aby temu zaprzeczyć, wystarczy podać jeden przykład – takiego elementu, który wspomnianej własności nie ma, a powinien ją mieć.**

Aby nie było zbyt naukowo, bardzo konkretny przykład. Ktoś powiedział: „jeżeli coś jest słodkie, to jest to cukier”. Wiemy, że jest to nieprawda, więc wyciągamy z kieszeni tabliczkę czekolady i mówimy: „Popatrz: to jest słodkie **i nie jest** to cukier!”.

Wobec tego: **zaprzeczeniem implikacji „Jeżeli p to q” jest zdanie „p i nie q”.**

### Praktyczny przykład

Czy twierdzenie: „jeżeli  $x \in \mathbf{R}$  to  $x^2 > 0$ ” jest prawdziwe?

Nie jest, bo  $0 \in \mathbf{R}$  i  $0^2 \nprec 0$ .

Czy twierdzenie: „jeżeli  $x \in \mathbf{R}$  to  $x^2 \geq 0$ ” jest prawdziwe?

Tak, bo nie potrafimy znaleźć takiej wartości  $x \in \mathbf{R}$ , dla której zachodzi  $x^2 \nprec 0$  (czyli  $x^2 < 0$ ).

## **Zaprzeczenie kwantyfikatora ogólnego**

Zaprzeczenie zdania „dla każdego  $x$ : warunek( $x$ )” jest łatwe. Wystarczy podać przykład takiego  $x$ , który nie spełnia podanego warunku.

Wobec tego: **zaprzeczeniem zdania „dla każdego  $x$ : warunek( $x$ )” jest zdanie „istnieje taki  $x$ , że warunek( $x$ ) nie jest spełniony”.**

### *Praktyczny przykład*

Wiem, że nieprawdą jest twierdzenie, iż **każdy** wielomian ma pierwiastki. Dlaczego? Bo **istnieje** taki wielomian, który **nie ma** pierwiastków, np.  $x^2 + x + 5$ .

Czy każdy ciąg rosnący jest ciągiem arytmetycznym? Nie – oto przykład: (1, 2, 4, 8, 16, 32, ...). Istnieją ciągi, które są rosnące i nie są arytmetyczne.

## **Zaprzeczenie kwantyfikatora szczegółowego**

Zaprzeczenie zdania „istnieje  $x$  taki, dla którego jest spełniony warunek  $w(x)$ ” i wzięcie na siebie obowiązku uzasadnienia, że mamy rację, nie jest łatwe. Musielibyśmy wykazać, że **wszystkie** wartości  $x$  nie spełniają podanego warunku, czyli musielibyśmy przeprowadzić dowód.

Wobec tego: **zaprzeczeniem zdania „istnieje taki  $x$ , że: warunek( $x$ )” jest zdanie „dla wszystkich  $x$  warunek( $x$ ) nie jest spełniony”.**

---

## *8. Aksjomaty, definicje...*

Nie lubimy, gdy ktoś używa niezrozumiałych dla nas słów. Na lekcjach matematyki jest kilka takich słów, które słyszymy wielokrotnie, więc powinniśmy znać dokładnie ich znaczenie:

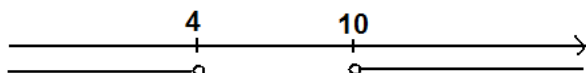
- ✓ **Aksjomat (postulat, pewnik)** - to zdanie przyjmowane za prawdziwe bez udowadniania go.
- ✓ **Definicja** – to wypowiedź o określonym kształcie, w której informuje się o znaczeniu danego słowa/wyrażenia.
- ✓ **Twierdzenie** – to zdanie w postaci implikacji, którego prawdziwość udowodniono.
- ✓ **Dowód** - to wykazanie, że pewne zdanie jest prawdziwe.  
Każdy krok dowodu musi jasno wynikać z poprzednich lub być przyjętym aksjomatem. Zwyczajowo koniec dowodu oznacza się skrótem c.n.d. (co należało dowieść) lub podobnym.

## 9. Przykładowe zadania z rozwiązaniami

1. Dla jakich  $x \in R$  prawdziwe jest zdanie: „ $x \in N^+$  i ( $x < 4$  lub  $x > 10$ )”?

### Rozwiązanie

Zbiór liczb spełniających alternatywę „ $x < 4$  lub  $x > 10$ ” przedstawimy na osi liczbowej:



Szukane liczby muszą jednocześnie (spójnik „i”) należeć do tego zbioru i do zbioru liczb naturalnych dodatnich. Wobec tego zbiór liczb, dla których prawdziwe jest podane zdanie jest następujący:  $\{1, 2, 3, 11, 12, 13, 14, 15 \dots\}$ .

---

2. Rozwiąż równanie:  $(x^2 - 25)\sqrt{x - 3} = 0$ .

### Rozwiązanie

Najpierw wyznaczmy dziedzinę równania:

$$x - 3 \geq 0$$

$$x \geq 3$$

Teraz wyznaczamy rozwiązania:

$$(x^2 - 25)\sqrt{x - 3} = 0$$

$$x^2 - 25 = 0 \quad \text{lub} \quad \sqrt{x - 3} = 0$$

$$x = 5 \quad \text{lub} \quad x = -5 \quad \text{lub} \quad x = 3$$

Z otrzymanych trzech liczb jedna:  $x = -5$  nie należy do dziedziny równania. Wobec tego równanie ma dwa rozwiązania:  $x = 5$  lub  $x = 3$ .

---

3. Zaznacz w układzie współrzędnych zbiór punktów, których współrzędne spełniają równanie:  $4x^2 = y^2$ .

### Rozwiązanie

$$4x^2 = y^2$$

$$4x^2 - y^2 = 0$$

$$(2x - y)(2x + y) = 0$$

$$2x - y = 0 \quad \text{lub} \quad 2x + y = 0$$

$$y = 2x \quad \text{lub} \quad y = -2x$$