

Seria repetytoriów dla szkół średnich

TABLICE MATURZYSTY MATEMATYKA



NASZ CEL:
MATURA
ZDANA NA 100%

TWÓJ DOMOWY NAUCZycIEL

TABLICE MATURZYSTY

MATEMATYKA

Opracowanie tablic:

Adam Konstantynowicz, Anna Konstantynowicz, Kaja Mikoszevska

Redaktor serii: **Marek Jannasz**

Ilustracje: **Magdalena Wójcik**

Projekt okładki: **Teresa Chylińska-Kur, KurkaStudio**

Projekt makiety i opracowanie graficzne: **Kaja Mikoszevska**

Tablice opracowano z wykorzystaniem materiałów z książki „Matematyka. Repetytorium maturzysty” autorstwa Adama Konstantynowicza i Anny Konstantynowicz,
Wydawnictwo Lingo, Warszawa 2016 r.

© Copyright by Wydawnictwo Lingo sp. j., Warszawa 2016

www.cel-matura.pl

ISBN: 978-83-7892-371-8

ISBN wydania elektronicznego: 978-83-7892-473-9

Skład i łamanie: Kaja Mikoszevska

Drodzy Maturzyści!

Przed Wami egzamin dojrzałości z matematyki. Aby ułatwić Wam naukę, przygotowaliśmy dla Was pomoc w formie wygodnych i przejrzystych tablic. Zawierają one wszystkie istotne zagadnienia maturalne z matematyki w pigułce, dzięki czemu będziecie mogli w szybki i prosty sposób przypomnieć i utrwalić sobie najważniejsze informacje.

Zależało nam na tym, aby nauka z naszej książki była nie tylko pożyteczna, ale także przyjemna – zadbaliliśmy zarówno o dobór tematów, jak i nowoczesny układ graficzny z ilustracjami.

Wierzymy, że „Tablice maturzysty” z serii OldSchool przydadzą się Wam na każdym etapie nauki, a także że będą dla Was skuteczną pomocą do powtórki przed egzaminem.

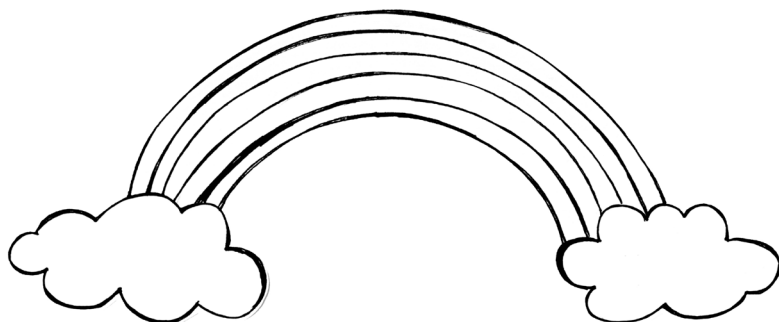
Z życzeniami powodzenia
autorzy i redaktorzy Lingo

Część 1. Podstawowe pojęcia	7
Część 2. Liczby rzeczywiste	33
Różne postaci liczb rzeczywistych	34
Wartość liczbową wyrażenia arytmetycznego	35
Pierwiastek dowolnego stopnia	37
Potęga o wykładniku wymiernym	38
Logarytmy	39
Błąd bezwzględny i błąd względny	40
Przedziały liczbowe	41
Wartość bezwzględna	43
Obliczenia procentowe	44
Część 3. Wyrażenia algebraiczne	51
Część 4. Równania i nierówności	57
Równania pierwszego stopnia z jedną niewiadomą	59
Układy równań	61
Nierówności	63
Równania kwadratowe i wielomianowe	64
Część 5. Funkcje	75
Sposoby opisywania funkcji	76
Wykresy funkcji	77
Funkcja liniowa	78
Funkcja kwadratowa	79
Funkcja $f(x) = \frac{a}{x}$	81
Funkcja wykładnicza	82
Część 6. Ciągi	95
Ciąg arytmetyczny	96
Ciąg geometryczny	97

Część 7. Trygonometria	103
Funkcje trygonometryczne kąta ostrego	104
Część 8. Planimetria	111
Kąty w okręgu	112
Styczna do okręgu	113
Okręgi styczne	114
Trójkąty podobne	115
Pole trójkąta ostrokątnego	115
Część 9. Geometria na płaszczyźnie kartezjańskiej	123
Równanie prostej na płaszczyźnie	124
Wzajemne położenie prostych	125
Odcinki	125
Symetria w układzie współrzędnych	126
Część 10. Stereometria	133
Graniastosłupy	134
Ostrosłupy	137
Walec	139
Stożek	140
Kula	142
Część 11. Elementy statystyki opisowej	151
Średnia arytmetyczna, średnia ważona zestawu danych, mediana i odchylenie standardowe	152
Kombinatoryka	153
Prawdopodobieństwo zdarzeń	154

CZĘŚĆ 1.

podsta-
wowe
pojęcia



Co maturzysta na pewno musi wiedzieć i znać

NAJWAŻNIEJSZE SYMBOLE MATEMATYCZNE

SYMBOL	ZNACZENIE
+	znak dodawania
−	znak odejmowania
·	znak mnożenia
:	znak dzielenia
%	znak procentu
‰	znak promila
=	znak „równa się”
≠	znak „nie równa się” („jest różne”)
≈	znak „równe w przybliżeniu”
>	znak „większe niż”
<	znak „mniejsze niż”
≥	znak „większe lub równe niż”
≤	znak „mniejsze lub równe niż”
∥	znak „równoległe z”
⊥	znak „prostopadłe do”
1°	1 stopień
1'	1 minuta
∠ lub ∢ lub ∠	znak „kąt”
∢ AOB	miara kąta AOB
AB	długość odcinka AB
ΔABC	trójkąt o wierzchołkach A, B, C
≡	znak przystawania figur
~	znak podobieństwa figur
a ⁿ	n-ta potęga liczby a

NAJWAŻNIEJSZE SYMBOLE MATEMATYCZNE

SYMBOL	ZNACZENIE
$\sqrt{a}$	pierwiastek kwadratowy z liczby a (pierwiastek stopnia drugiego)
$\sqrt[3]{a}$	pierwiastek sześcienny z liczby a (pierwiastek stopnia trzeciego)
$\sqrt[n]{a}$	pierwiastek n -tego stopnia z liczby a
$ a $	wartość bezwzględna liczby a
$NWD(a, b)$	największy wspólny dzielnik liczb a i b
$NWW(a, b)$	najmniejsza wspólna wielokrotność liczb a i b
π	liczba pi (3,14159...)
∞	nieskończoność
$\in$	należy do
$\notin$	nie należy do
$\log_a b$	logarytm przy podstawie a liczby b
$(a, b), \langle a, b \rangle, [a, b],]a, b[$	przedziały liczbowe
$\sin \alpha$	sinus kąta α
$\cos \alpha$	cosinus kąta α
$\operatorname{tg} \alpha$	tangens kąta α
a_n	n -ty wyraz ciągu
$\bar{x}$	średnia arytmetyczna
$\bar{x}_w$	średnia ważona
σ	odchylenie standardowe
Ω	zbiór zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego
$P(A)$	prawdopodobieństwo zdarzenia A
$\cup$	suma zbiorów
$\cap$	iloczyn (część wspólna) zbiorów
$\emptyset$	zbiór pusty

Liczby rzeczywiste

RODZAJE LICZB

RODZAJ	OPIS
liczby naturalne	0, 1, 2, 3, 4, 5, ...
liczby całkowite	... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
liczby wymierne	liczby, które dają się zapisać w postaci ułamka zwykłego, np. $\frac{3}{7}$; $2 = \frac{6}{3}$; $-3,5 = -\frac{7}{2}$
liczby niewymierne	liczby, które nie dają się zapisać w postaci ułamka zwykłego, np. $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$, π , ...
liczby parzyste	liczby podzielne przez 2, np. 2, 4, 6, 8, ...
liczby rzeczywiste	liczby wymierne i niewymierne

ROZWINIĘCIA DZIESIĘTNE LICZB RZECZYWISTYCH

RODZAJ	PRZYKŁAD
rozwiniecie dziesiętne skończone	$\frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 0,75$
rozwiniecie dziesiętne nieskończone okresowe	$\frac{5}{11} = 0,4545... = 0,(45)$
rozwiniecie dziesiętne nieskończone nieokresowe	$\sqrt{2} = 1,414213...$ $\pi = 3,1415926...$

DZIAŁANIA NA POTĘGACH

POJĘCIE	ZAPIS
potęga o wykładniku naturalnym	$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ czynników}}$ $a^1 = a$ $a^0 = 1, a \neq 0$
potęga o wykładniku całkowitym ujemnym	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}, a \neq 0$

DZIAŁANIA NA POTĘGACH

POJĘCIE

ZAPIS

potęga o wykładniku wymiernym

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ gdzie } \frac{m}{n} \text{ jest}$$

liczbą wymierną i $n > 0$

iloczyn potęg o takich samych podstawach

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

iloraz potęg o takich samych podstawach

$$a^n : a^m = a^{n-m}$$

iloczyn potęg o takich samych wykładnikach

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$$

iloraz potęg o takich samych wykładnikach

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, b \neq 0$$

potęga potęgi

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

DZIAŁANIA NA PIERWIĄSTKACH

POJĘCIE

OPIS

pierwiastek

- pierwiastkiem n -tego stopnia z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b , że $b^n = a$
- oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{a}$
- dla $n = 2k + 1$ (k jest liczbą naturalną większą od 0) liczba a może być mniejsza od 0

mnożenie pierwiastków

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

dzielenie pierwiastków

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

rozwinięcia dziesiętne
wybranych pierwiastków

$$\sqrt{2} = 1,414213...$$

$$\sqrt{3} = 1,732050...$$

$$\sqrt{5} = 2,236067...$$

$$\sqrt[3]{2} = 1,259921...$$

$$\sqrt[3]{3} = 1,442249...$$

$$\sqrt[3]{5} = 1,709975...$$

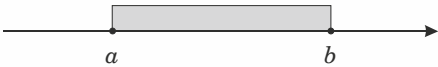
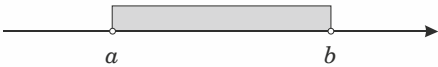
DZIAŁANIA NA LOGARYTMACH

POJĘCIE	OPIS
logarytm	- logarytmem przy podstawie a liczby b nazywamy taką liczbę c, że $a^c = b$ - logarytm istnieje wówczas, gdy $a > 0$ i $a \neq 1$ oraz $b > 0$ $\log_a b = c$, gdy $a^c = b$
logarytm iloczynu	$\log_a b \cdot c = \log_a b + \log_a c$
logarytm ilorazu	$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$
logarytm potęgi	$\log_a b^n = n \log_a b$, gdzie n jest dowolną liczbą rzeczywistą

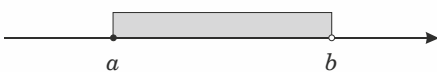
BŁĄD BEZWZGLĘDNY I BŁĄD WZGLĘDNY

POJĘCIE	OPIS
błąd bezwzględny	$ a - b $, gdzie a to dana liczba, a b to jej przybliżenie
błąd względny	$\frac{ a - b }{ a }$, gdzie a to dana liczba, a b jej przybliżenie
błąd względny procentowy	$\frac{ a - b }{ a } \cdot 100\%$

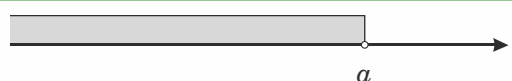
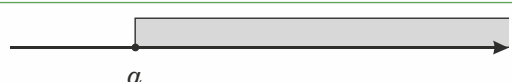
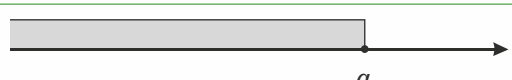
PRZEDZIAŁY LICZBOWE OGRANICZONE

PRZEDZIAŁ	ZAPIS	ZAZNACZENIE NA OSI LICZBOWEJ
domknięty (obustronnie)	$\langle a, b \rangle$ $a \leq x \leq b$	
otwarty (obustronnie)	(a, b) $a < x < b$	

PRZEDZIAŁY LICZBOWE OGRANICZONE

PRZEDZIAŁ	ZAPIS	ZAZNACZENIE NA OSI LICZBOWEJ
lewostronnie domknięty	$\langle a, b \rangle$ $a \leq x < b$	
prawostronnie domknięty	$(a, b \rangle$ $a < x \leq b$	

NIEOGRANICZONE PRZEDZIAŁY LICZBOWE

PRZEDZIAŁ	ZAPIS	ZAZNACZENIE NA OSI LICZBOWEJ
otwarty	(a, ∞) $x > a$	
	$(-\infty, a)$ $x < a$	
domknięty	$\langle a, \infty)$ $x \geq a$	
	$(-\infty, a \rangle$ $x \leq a$	

OBLICZENIA PROCENTOWE

POJĘCIE	OPIS
procent danej liczby	aby obliczyć procent danej liczby, należy przedstawić procent w postaci ułamka zwykłego lub dziesiętnego i pomnożyć ułamek przez tę liczbę
obliczanie liczby na podstawie danego jej procentu	aby obliczyć liczbę na podstawie jej procentu dzielimy tę liczbę przez jej procent zamieniony na ułamek
obliczanie, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba	aby obliczyć, jakim procentem jednej liczby jest druga liczba, należy ustalić, jakim ułamkiem jednej liczby jest druga, a następnie wyrazić ten ułamek w procentach

OBLICZENIA PROCENTOWE

POJĘCIE	OPIS
procent składany	kapitał K złożony do banku na n lat na procent składany przy stałym oprocentowaniu $p\%$, po n latach wynosi: $K_n = K \left(1 + \frac{p}{100} \right)^n$
	kapitał K złożony do banku na n lat, przy oprocentowaniu rocznym $p\%$ i kapitalizacji m razy w roku, po n latach wynosi: $K_n = K \left(1 + \frac{p}{100m} \right)^{m \cdot n}$

Wyrażenia algebraiczne

WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

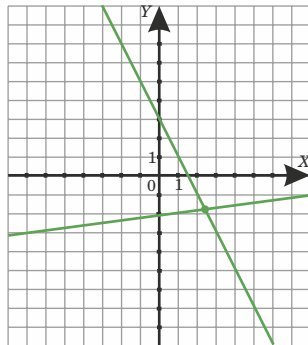
DZIAŁANIE	ZAPIS
kwadrat sumy dwóch wyrażeń	$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
kwadrat różnicy dwóch wyrażeń	$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
różnica kwadratów dwóch wyrażeń	$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

Równania

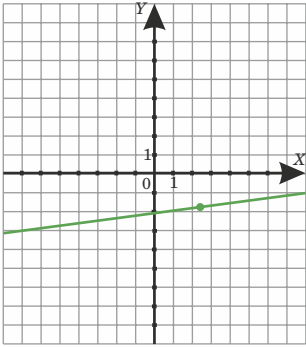
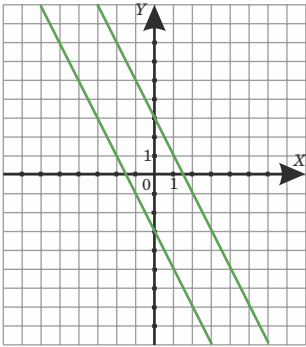
RODZAJE RÓWNAŃ

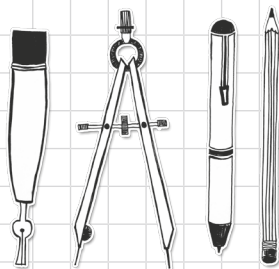
POJĘCIE	OPIS
równanie	dwa wyrażenia algebraiczne połączone znakiem równości, np. $3x - 1 = 2(x + 5)$
rozwiązanie równania	każda liczba, która wstawiona w miejsce niewiadomej zmienia równanie w równość
równanie tożsamościowe	równanie, którego rozwiązaniem jest każda liczba
równanie sprzeczne	równanie, które nie ma rozwiązania
proporcja	• równość $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, gdzie $b \neq 0$ i $d \neq 0$ • w proporcji iloczyn wyrazów skrajnych jest równy iloczynowi wyrazów środkowych
układ równań	dwa równania z dwiema niewiadomymi, np. $\begin{cases} x + 5y = 2 \\ 3x - 2y = 36 \end{cases}$
rozwiązanie układu równań	para liczb spełniająca oba równania jednocześnie

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA UKŁADU RÓWNAŃ PIERWSZEGO STOPNIA Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

UKŁAD	ROZWIĄZANIE	RYСУNEK
oznaczony	układ równań, który ma jedno rozwiązanie	

INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA UKŁADU RÓWNAŃ PIERWSZEGO STOPNIA Z DWIEMA NIEWIADOMYMI

UKŁAD	ROZWIĄZANIE	RYSUNEK
nieoznaczony	układ równań, który ma nieskończenie wiele rozwiązań	
sprzeczny	układ równań, który nie ma rozwiązań	



Nierówności

NAJWAŻNIEJSZE POJĘCIA DOTYCZĄCE NIERÓWNOŚCI

POJĘCIE	OPIS
nierówność	dwa wyrażenia algebraiczne połączone jednym ze znaków: $<$, $>$, $\leq$ lub $\geq$, np. $3x + 2(1 - x) < 0, 1 - x$
rozwiązanie nierówności	znalezienie wszystkich liczb, które tę nierówność spełniają, zbiór wszystkich liczb, które są rozwiązaniem nierówności można zapisać za pomocą przedziału liczbowego lub przedstawić na osi liczbowej

Równania kwadratowe

NAJWAŻNIEJSZE POJĘCIA DOTYCZĄCE RÓWNAŃ KWADRATOWYCH

POJĘCIE	OPIS
równanie kwadratowe niezupełne	$ax^2 + bx = 0$, $ax^2 + c = 0$, $a \neq 0$
równanie kwadratowe zupełne	$ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$
wyróżnik	$\Delta = b^2 - 4ac$

LICZBA PIERWIĄTKÓW (ROZWIĄZAŃ) RÓWNAŃ

WARTOŚĆ WYRÓŻNIKA	ROZWIĄZANIE
$\Delta > 0$	dwa pierwiastki: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	jeden pierwiastek: $x_0 = \frac{-b}{2a}$
$\Delta < 0$	nie ma pierwiastków

Nierówności kwadratowe

NAJWAŻNIEJSZE POJĘCIA DOTYCZĄCE NIERÓWNOŚCI KWADRATOWYCH

POJĘCIE	OPIS
nierówność	np. $x^2 + x - 1 > 0$
rozwiązanie nierówności	- znalezienie wszystkich liczb, które tę nierówność spełniają, - do rozwiązywania nierówności kwadratowych stosuje się wiedzę dotyczącą funkcji kwadratowej i równań kwadratowych

Równania wymierne

NAJWAŻNIEJSZE POJĘCIA DOTYCZĄCE RÓWNAŃ WYMIERNYCH

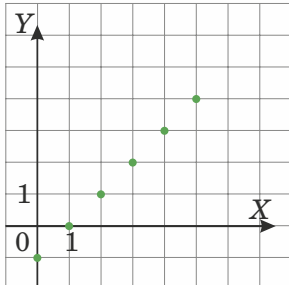
POJĘCIE	OPIS
równania sześciennie	korzystając z definicji pierwiastka możemy rozwiązywać niektóre równania sześciennie, np.: $ax^3 + c = 0$, $ax^3 - c = 0$, $a \neq 0$
równania wielomianowe	$W(x) = 0$, np. $x^2 - 5x + 2 = 0$, $-2x^3 + x^2 - 4x + 1 = 0$
rozwiązanie równania wielomianowego	należy rozłożyć wielomian na czynniki, a następnie rozwiązać kilka równań, przyrównując każdy z czynników do zera, np.: $x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 6x = 0$ $x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x - 3) = 0$ $x = 0 \text{ lub } x = \sqrt{2} \text{ lub } x = -\sqrt{2} \text{ lub } x = 3$
równanie wymierne	np. $\frac{x-1}{x+2} = 3$, $\frac{2x+5}{x} = 4x$
rozwiązanie równania wymiernego	każda liczba z dziedziny równania, która je spełnia

Funkcje

NAWAŻNIEJSZE POJĘCIA DOTYCZĄCE FUNKCJI

POJĘCIE	OPIS
układ współrzędnych	dwie osie liczbowe przecinające się pod kątem prostym w punkcie zerowym dla obu osi
współrzędne punktu	para liczb (odcięta, rzędna) określająca położenie punktu w układzie współrzędnych na płaszczyźnie

SPOSOBY OPISYWANIA FUNKCJI

SPOSÓB	PRZYKŁAD														
opis słowny	„Każdej liczbie naturalnej nie większej od 5 przyporządkowujemy liczbę o 1 mniejszą”.														
tabela	<table><tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>y</td><td>-1</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table>	x	0	1	2	3	4	5	y	-1	0	1	2	3	4
x	0	1	2	3	4	5									
y	-1	0	1	2	3	4									
wzór	$f(x) = x - 1, D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$														
wykres															

WŁASNOŚCI FUNKCJI

POJĘCIE	OPIS
miejsce zerowe	każdy argument, dla którego wartość funkcji jest równa zero
funkcja rosnąca	wraz ze wzrostem argumentów zwiększają się wartości funkcji
funkcja malejąca	wraz ze wzrostem argumentów zmniejszają się wartości funkcji
funkcja stała	wraz ze wzrostem argumentów wartości funkcji są sobie równe

CO MOŻNA ODCZYTAĆ Z WYKRESU FUNKCJI?

POJĘCIE	OPIS
wartość funkcji dla danego argumentu	rzędna punktu o odciętej równej danemu argumentowi
argumenty, dla danej wartości funkcji	odcięta punktu o rzędnej równej danej wartości funkcji
argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości dodatnie	argumenty, dla których wykres znajduje się nad osią X
argumenty, dla których funkcja przyjmuje wartości ujemne	argumenty, dla których wykres znajduje się pod osią X
miejsca zerowe funkcji	argumenty dla których funkcja przyjmuje wartość zero

WYKRESY FUNKCJI

WZÓR	WYKRES OTRZYMUJEMY PRZEZ...
$y = f(x + a)$, dla $a > 0$	przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w lewo wzdłuż osi X
$y = f(x - a)$, dla $a > 0$	przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w prawo wzdłuż osi X
$y = f(x) + a$, dla $a > 0$	przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w górę wzdłuż osi Y
$y = f(x) - a$, dla $a > 0$	przesunięcie wykresu funkcji $y = f(x)$ o a jednostek w dół wzdłuż osi Y
$y = -f(x)$	symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi X
$y = f(-x)$	symetryczne odbicie wykresu funkcji $y = f(x)$ względem osi Y

NAJWAŻNIEJSZE WŁASNOŚCI FUNKCJI LINIOWEJ

POJĘCIE	OPIS
wzór	$f(x) = ax + b$ dla $x \in \mathbb{R}$, a i b są stałymi
własności	funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest rosnąca dla $a > 0$, malejąca dla $a < 0$, stała dla $a = 0$ • jeśli $a \neq 0$, to funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ ma jedno miejsce zerowe: $-\frac{b}{a}$ • jeśli $a = 0$ i $b \neq 0$, wówczas funkcja liniowa nie ma miejsc zerowych • jeśli $a = 0$ i $b = 0$, to funkcja liniowa ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, każda liczba rzeczywista jest jej miejscem zerowym

FUNKCJA KWADRATOWA

POJĘCIE	OPIS
wzór postaci ogólnej	funkcja określona wzorem $f(x) = ax^2 + bx + c$, gdzie a, b i c są stałymi, a $a \neq 0$
wzór postaci kanonicznej	$f(x) = a(x - p)^2 + q$, gdzie $p = -\frac{b}{2a}$, $q = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}$
wzór postaci iloczynowej	jeśli $\Delta > 0$ $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2),$ gdzie $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ i $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
wyróżnik	liczba $b^2 - 4ac$, oznaczana symbolem Δ
wykres	parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych: $x_w = -\frac{b}{2a}, y_w = -\frac{\Delta}{4a}$ $a > 0$ – ramiona skierowane do góry $a < 0$ – ramiona skierowane do dołu