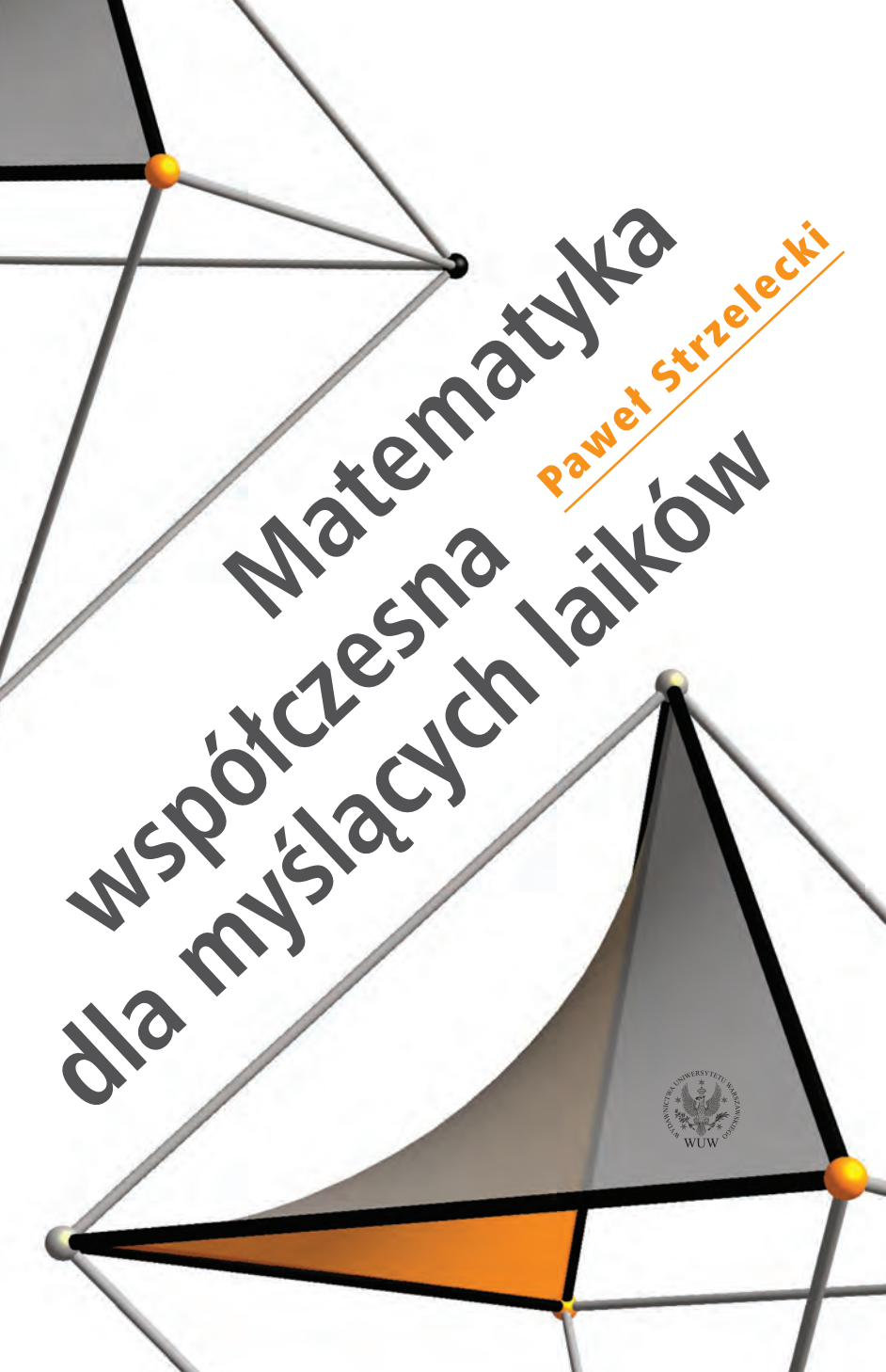




Matematyka współczesna dla myślących laików

Paweł Strzelecki



**Matematyka współczesna
dla myślących laików**

Matematyka współczesna dla myślących laików

Paweł Strzelecki



Projekt okładki
Katarzyna Jarnuszkiewicz

Redakcja i korekta
Izabela Mika

Redakcja techniczna
Zofia Kosińska

Redaktor prowadzący
Małgorzata Yamazaki

Skład i łamanie
Raven

© Copyright by Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego,
Warszawa 2011

ISBN 978-83-235-0817-5

ISBN 978-83-235-1103-8 PDF

Wydanie I

Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego
00-497 Warszawa, ul. Nowy Świat 4
<http://www.wuw.pl>; e-mail: wuw@uw.edu.pl
Dział Handlowy: tel (0 48 22) 55 31 333
e-mail: dz.handlowy@uw.edu.pl
Księgarnia internetowa: <http://www.wuw.pl/ksiegarnia>



Spis treści

Skąd się wzięła ta książka?	6
1 Od zasady szufladkowej do osobliwości niezderzeniowych	13
2 Gdyby Cayley miał komputer	38
3 Wielbiciele i krytycy geometrii fraktalnej	54
4 Krzywe i pomiar ich zakrzywienia	78
5 Matematyka optymalnej formy	96
6 Pomarańcze, plastry miodu i kolorowanie map	127
7 Piękno czy przydatność?	151
8 Hipoteza Riemanna	179
9 Katalog kształtów naszego Wszechświata	206
Zamiast zakończenia	235
Bibliografia	237



Skąd się wzięła ta książka?

Na początku 2007 roku postanowiłem, że w semestrze zimowym roku akademickiego 2007/2008 poprowadzę na Uniwersytecie Warszawskim wykład ogólnouniwersytecki – to znaczy wykład, który w zamyśle powinien być dostępny dla możliwie szerokiej studenckiej publiczności z różnych wydziałów – pod tytułem *Matematyka współczesna dla myślących laików*. Pełniłem wtedy dość czasochłonne obowiązki prodziekana ds. studenckich i pomyślałem naiwnie, że na podstawie różnych swoich popularnych tekstów, pisanych od wczesnych lat dziewięćdziesiątych XX wieku dla miesięcznika *Delta*, oraz odczytów, jakie miewałem podczas Festiwalu Nauki, zbuduję taki wykład bez większych problemów, oszczędzając czas, którego bardzo mi wtedy brakowało na zajmowanie się własnymi badaniami matematycznymi. Praca nad ilustrowaniem tego wykładu i opowiadaniem różnych rzeczy mieszanej publiczności w sposób możliwie prosty zajęła mi później znacznie więcej czasu, niż się spodziewałem.

W oficjalnym opisie wykładu napisałem, że typowy człowiek wykształcony – nawet taki, który podczas studiów uczył się trochę matematyki – nie styka się na ogół z osiągnięciami matematyki współczesnej (a jeśli już, to często trafia na nie w wersji gazetowej, okrojonej, wypranej z sensu i odpowiednio, jak mówią Francuzi, zwulgaryzowanej). Napisałem także, że nie jest moim zamiarem kogokolwiek czegokolwiek uczyć; chciałem tylko podczas cyklu luźno powiązanych, popularnych odczytów pokazać pewną liczbę wybranych, w miarę aktualnych problemów

matematycznych i wyników badań nad nimi. Wybierając tematy, kierowałem się – prócz własnego gustu – ich znaczeniem, prostotą sformułowań oraz intrygującym charakterem zagadnień, a także ich związkami z poważnymi otwartymi pytaniami lub nieoczekiwanymi zastosowaniami matematyki.

Nie zakładałem, że moi słuchacze będą mieli szczególnie głęboką wiedzę matematyczną. Przyjąłem jednak, że matematyka (jako dziedzina ludzkiej aktywności o bardzo różnorodnym charakterze) ich ciekawi, że raczej nie mówią o sobie: *bo ja zawsze miałem kłopoty z matematyką*, a nawet jeśli tak czasem myślą, to trochę tego stanu rzeczy żałują. Przyjąłem także, że będą gotowi włożyć trochę wysiłku w słuchanie moich pogawędek i zadawanie pytań. Na pierwszym wykładzie wśród publiczności znalazły się mniej więcej równoliczne grupy studentów mojego własnego wydziału oraz studentów innych wydziałów UW, także stuprocentowo humanistycznych. Udział w wykładzie oczywiście nie był obowiązkowy (na zaliczenie wystarczyło napisać esej – wypracowanie na jeden z trzech zadanych tematów), więc po kilkunastu tygodniach towarzyszyła mi tylko część początkowej liczby słuchaczy. Gdy jednak na ostatnim wykładzie zapytałem ponownie, kto jest spoza Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, ku mojemu zaskoczeniu mniej więcej połowa obecnych na sali podniosła ręce. Dla mnie zaś, po wcześniejszych opowieściach o całkiem zaawansowanej i poważnej matematyce, było to świadectwo, że nie poniosłem całkowitej porażki: znaleźli się nie-matematycy, którzy chcieli takich opowieści słuchać.

Istnieje wiele świetnych książek napisanych po to, żeby komuś, kto widzi matematykę od zewnątrz, albo z samego brzegu, jako dziedzinę, która dopiero może się przed nim otworzyć szerzej, pokazać, że matematyka jest jednak czymś innym i nieporównanie bogatszym niż szkolny przedmiot noszący tę samą nazwę. Należą do nich m.in. *Co to jest matematyka* Couranta i Robbinsa, *O liczbach i figurach* Rademachera i Toeplitza, *Kalejdoskop matematyczny* Hugona Steinhausa, a z nowszych pozycji dostępnych po polsku: *Diamenty matematyki* Krzysztofa Ciesielskiego i Zdzisława Pogody, a także *Listy do młodego matematyka* Iana Stewarta. Po cóż więc pisać jeszcze jedną?

Nie mam na to idealnej odpowiedzi. Myślę, że każdy z nas może dawać w miarę zrozumiałe świadectwo temu, co robi. W przypadku matematyki jest to niełatwe zadanie, bo wspomniany już *typowy wykształcony człowiek* nie tylko ma co najwyżej przeciętne pojęcie o matematyce, tzn. z reguły nie zna pojęć matematycznych, które wprowadzono później niż w połowie XVII wieku, ale także ma wyobrażenie matematyki jako dziedziny zamkniętej, w której wszystko już wiadomo, a wszystkie teorie oraz zadania z rozwiązaniami spisane są w podręcznikach. Paul Halmos powiedział kiedyś: *smuci mnie, że nawet wykształceni ludzie nie wiedzą, że mój przedmiot istnieje naprawdę*. Mnie też smuci, gdy ludzie, darzący mnie skądinąd przyjaźnią, pytają: *skoro nie jesteś już prodziekanem i nie wyjeżdżasz w nadchodzącym semestrze pracować na innej europejskiej uczelni, to po prostu zajmujesz się tylko wykładaniem na Banacha, tak?* Smuci mnie, gdy uznają, że najważniejszą, wręcz może jedyną częścią mojej pracy – pracy każdego uniwersyteckiego matematyka – jest nauczanie i współudział w administrowaniu uczelnią, a zawodowe wyjazdy w świat wiążą się z robieniem tego samego, tylko pod innym niebem i przy innej tablicy.

Nikt nie zadałby podobnych pytań przedstawicielom nauk doświadczalnych ani tym bardziej malarzowi zatrudnionemu w jakiejś uczelni artystycznej lub reżyserowi pracującemu w szkole filmowej. Szeroka, najbardziej nawet naiwna publiczność jakoś wiąże fizyka z elektronami, falami, optyką, energią jądrową, półprzewodnikami, ciekłymi kryształami, biologa zaś – z genami, szalonymi krowami, ekologią, klonowaniem i owcą Dolly. Publiczność wie także, że *kiedyś tego – tzn. owcy Dolly i energii jądrowej* – nie było. Matematyk zaś ma biurko, krede, tablicę, jakieś książki, papier i ołówek. Zajmuje się z niepojętym oddaniem tym, co wszyscy wiedzą od dawna, tylko po maturze (lub po ostatnim egzaminie z matematyki dla chemików i inżynierów) mogą wreszcie z ulgą odetchnąć i o tym zapomnieć.

Chciałem więc spróbować opowiedzieć, co robią matematycy i na czym polega ich praca. Wiem, że przede mną inni robili to szerzej i lepiej. Jednak myślę, że warto co jakiś czas próbować opowiadać to samo od nowa, innymi słowami. Matematyka nie

jest jakimś *zaginionym światem* ani *rajem utraconym*. Dla niektórych jest być może *tajemniczą wyspą*, jednak przede wszystkim jest częścią naszej codziennej kultury, a także dziedzina, którą z pasją zajmują się na całym świecie dziesiątki tysięcy ludzi z krwi i kości.

Głównymi adresatami moich opowieści są dwie kategorie osób. Po pierwsze, młodzi ludzie, którzy zaczynają studiować matematykę i chcieliby może czasem odpocząć od sformalizowanych wykładów, a jednocześnie na przedmiot studiów spojrzeć z dystansu i z dalszej perspektywy. Po drugie, takie osoby, które z matematyką rozstały się w okolicach matury lub studiów, ale gotowe byłyby poświęcić trochę czasu, żeby się dowiedzieć, dlaczego matematycy sądzą, że ich przedmiot naprawdę istnieje, i czym się zajmują w chwilach wolnych od wykładania.

* * *

Obraz matematyki w tej książce jest niepełny i wycinkowy. Nie ma tu ani wszystkich ważnych gałęzi matematyki, ani tym bardziej wszystkich zastosowań matematyki (jednak o różnych zastosowaniach staram się czasem wspominać). Wybór tematów został podyktowany moim gustem i rozmiarami mojej niewiedzy. Czytelnik powinien pamiętać, że niemal o wszystkich poruszonych w tej książeczce tematach wiem z grubsza tyle, ile kardiolog wie o ortopedii albo ichtiolog o ornitologii. Innymi słowy, też w pewnym sensie jestem laikiem, tyle że z fachowym przygotowaniem.

W wielu rozdziałach tekstowi towarzyszą obrazki. Zachęcony przez jednego z kolegów, profesora Dariusza Wrzoska z Instytutu Matematyki Stosowanej UW, chciałbym wyraźnie zaznaczyć jedno: tych rysunków nie wybierał grafik dysponujący odpowiednio bogatym katalogiem gotowych ilustracji, myszką i pięknym komputerem do składania tekstów. Za każdym z nich stoją odpowiednie wzory i równania oraz chwila namysłu, jak przedstawić to i owo. Te obrazki też są częścią tego, jak matematycy widzą swój przedmiot i badane obiekty.

* * *

Podczas pisania tej książki korzystałem z uwag, porad i pomocy wielu osób. Po pierwsze, dziękuję Małgosi, Marcie i Michałowi, którzy jako króliki doświadczalne, reprezentujące dwie wspomniane główne kategorie moich adresatów, czytali spore fragmenty pierwszych wersji tekstu.

Każdy matematyk miewa znajomych w wielu miejscach świata; nawet jeśli niektórych zna luźno lub wręcz tylko z korespondencji, to zwykle może liczyć na ich bezinteresowne wsparcie. Parę takich osób chciałbym tu wymienić. John M. Sullivan z Politechniki w Berlinie i Chris H. Rycroft z Uniwersytetu Kalifornijskiego w Berkeley użyczyli mi kilku rysunków (Czytelnik znajdzie je w rozdziale piątym i szóstym, z odpowiednimi adnotacjami). Jestem im szczerze zobowiązany. Akurat tych rysunków nie potrafiłbym wykonać samodzielnie, bo nie mam takiego jak oni talentu i doświadczenia programistycznego. Colette Anné z Uniwersytetu w Nantes zaopatrzyła mnie w pełny francuski tekst przemówienia Jeana Leraya, z którego zaczerpnąłem jeden z dwóch cytatów otwierających książkę. Steven Krantz z Uniwersytetu Waszyngtona w St. Louis na początku października 2007 roku, gdy zaczynałem prowadzić wykład, z którego wyrosła ta książka, udostępnił mi (wtedy jeszcze roboczy) maszynopis swojej książki *The proof is in the pudding*. Mogłem dzięki temu konfrontować własne poglądy na matematykę i sposoby jej popularyzacji z jego przemyślanym spojrzeniem na rolę dowodów w matematyce.

Dziękuję pani profesor Annie Zdunik z Instytutu Matematyki UW, która przeczytała fragmenty gotowego tekstu i podzieliła się ze mną swoimi wrażeniami.

Bardzo wdzięczny jestem profesorowi Markowi Kordosowi, który po pierwsze przez około 20 lat ukształtował moje poglądy na istotę i znaczenie popularyzacji matematyki (to dzięki pracy w kierowanej przezeń redakcji miesięcznika *Delta* nabrałem nawyku regularnego czytania o wszelkich nowinkach matematycznych oraz o dawnych korzeniach tych nowinek – także w obszarach oddalonych od moich własnych zainteresowań badawczych), po drugie przekonywał mnie, że napisanie tej książki ma sens, po trzecie zaś był pierwszym czytelnikiem całości i zgłosił

wiele uwag, które pozwoliły ulepszyć tekst i usunąć część moich potknięć. W popularyzatorskiej części mojego matematycznego żywota czuję się jego uczniem i dłużnikiem.

Wreszcie, dziękuję pani redaktor Małgorzacie Yamazaki z Wydawnictw Uniwersytetu Warszawskiego, która z anielską cierpliwością, godną zaiste lepszej sprawy, zносиła moje nierówne zmagania z płynącym czasem, obdarzając mnie jednocześnie słowami spokojnej i bardzo życzliwej zachęty, pozwalającymi wierzyć, że całe przedsięwzięcie uda się doprowadzić do końca.

Wszystkim za wsparcie i pomoc dziękuję. Wszelkie błędy w tej książce są zawinione wyłącznie przeze mnie.

Paweł Strzelecki
Warszawa, maj 2011 roku

Różne jej części są nierozłączne, podobnie jak różne organy każdej żywej istoty; jak każda żywa istota matematyka musi bez przerwy sama siebie budować i odtwarzać. Nie możemy się jej nauczyć; musimy ją odkrywać od nowa. Każde pokolenie odbudowuje ją zatem coraz piękniejszą, obszerniejszą i potężniejszą, ale i coraz bardziej złożoną, mimo przyjemności, jaką matematyka odnajduje w zapominaniu tego, co uzna za zbyt techniczne. Dlatego śmierć badań matematycznych oznaczałaby śmierć myślenia matematycznego, czyli upadek całego języka nauk przyrodniczych. Eksperymentowanie nie polega bowiem tylko na używaniu naszych zmysłów i rąk, ale także na tworzeniu rozsądnych schematów tej niewielkiej części fizycznej rzeczywistości, którą widzimy.

Jean Leray

W uprawianiu matematyki, w odkrywaniu takich sposobów myślenia, które pozwalają wyjaśniać, organizować i upraszczać, tkwi prawdziwa radość. Można tę radość przeżyć, odkrywając nową matematykę lub odnajdując matematykę starą i znaną, ucząc się od kogoś sposobu myślenia, a wreszcie - wpadając na to, że na znaną strukturę matematyczną można spojrzeć inaczej.

William Thurston

Od zasady szufladkowej do osobliwości niezderzeniowych

Co właściwie robią matematycy? Czym się zajmują? Niniejsza książka wyrosła z rozmaitych prób zmierzenia się z tymi pytaniami.

William Thurston w eseju *O dowodzie i o postępie w matematyce* pisze, że matematycy mają na ogół wrażenie, iż wiedza, czym jest matematyka, ale trudno im podać jej dobrą bezpośrednią definicję. Owa trudność wydaje mu się czymś istotnym, wskazującym na złożoną i rekurencyjną strukturę matematyki. Odnajduję lekką nutkę jego zawodowej ironii, gdy czytam, jak stwierdza, że można byłoby określić matematykę jako najmniejszą dziedzinę, spełniającą trzy warunki:

- matematyka obejmuje liczby naturalne oraz geometrię płaską i przestrzenną;
- matematyka jest przedmiotem badań matematyków;
- matematykami są ci ludzie, którzy zwiększają i pogłębiają nasze zrozumienie matematyki.

Kto zechce, może zbyć Thurstona lekceważącym prychnięciem, uznając, że matematyka, którą poznał w szkole czy na studiach i o której – jak o biologii, chemii, fizyce, literaturze czy muzyce – ma wszak pewne elementarne pojęcie, jest czymś szerszym, głębszym lub po prostu czymś innym. Znam jednak wielu ludzi, którzy zgodziliby się niemal bez zastrzeżeń z określeniem Thurstona, a sami siebie określają jako matematyków.

Na pytanie: *co właściwie robią matematycy?* Thurston odpowiada jasno: zwiększają i pogłębiają nasze zrozumienie matematyki. Przeciwnie uważny Czytelnik dostrzeże, że nie chodzi tu tylko ani nawet przede wszystkim o to, żeby kogoś uczyć, czy coś komuś objaśniać. Matematycy z definicji Thurstona nie tylko uczą innych, ale odkrywają nową matematykę, odnajdują matematykę znaną wcześniej, a także uczą się sami, od kolegów i z cudzych tekstów, nowych sposobów myślenia.

Jeden z moich warszawskich kolegów, Wojciech Guzicki, rzucił kiedyś w paruosobowym gronie, że matematyki należy uczyć w szkole z trzech powodów. Po pierwsze, jest przydatna; po drugie, porządkuje myślenie; po trzecie, jest po prostu piękna. Przydatności, w sensie cywilizacyjnym, nikt poważny nie będzie zaprzeczał. Bez matematyki nie byłoby ani lotów kosmicznych, ani tomografu komputerowego, ani protokołów komunikacyjnych umożliwiających bezpieczne zakupy w Internecie, ani dokładnych krótkoterminowych prognoz pogody. Argument o porządkowaniu myślenia też przyjmują wszyscy: przeczytać zadanie, zrozumieć polecenie, wypisać dane i niewiadome, zastanowić się spokojnie, rozwiązać krok po kroku i sprawdzić, co właściwie wyszło, a zdobyte dzięki temu doświadczenie wykorzystywać (najlepiej ze zrozumieniem) w przyszłości. To, jak się wydaje, mogłoby dobrze służyć każdemu, niezależnie od tego, jaką drogę w życiu sobie wybierze.

Wzmianka o pięknie potrafi jednak budzić odruchy zdziwienia, a nawet sprzeciwu. Cóż pięknego tkwi, powiedzmy, w bolesnym zakuwaniu do klasówki z algebry? W rozwiązywaniu zadań o cenach bułek i ciastek albo stężeniach pomieszanych roztworów soli? Kłopot polega na tym, że ta część szkolnego oblicza matematyki *w odpowiednio złym wykonaniu* może mieć z matematyką jako taką mniej więcej tyle wspólnego, ile wspólnego z prawdziwą literaturą ma lekcja profesor Bładaczki, kładącej, że Słowacki wielkim poetą był.

Piękno tkwi w urodzie rozumowań, w przeżytym uczuciu zaskoczenia, w potwierdzonych intuicjach i odnalezionym zrozumieniu. Nie chciałbym tu nikogo uczyć; nie zamierzam przedstawiać żadnego przystępnego encyklopedycznego obrazu

współczesnej matematyki, bo sam widzę tylko jej skromny wy-cinek. Chcę natomiast opowiedzieć kilka historii o działalności moich kolegów po fachu. W niektórych będzie trochę szczegółów, zachęty do samodzielnego sięgnięcia po papier i ołówek lub inne narzędzia, w innych – tylko obrazowe i poglądowe opowiadki. Ja sam widzę w tych historiach zarówno potwierdzenie urody i przydatności matematyki, jak i ilustrację słów Thurstona o prawdziwej radości. Widzę w nich także świadectwo słuszności poglądu Davida Hilberta, że niemal cała matematyka polega na rozwiązywaniu problemów i zadań, a nowe teorie czy pojęcia są od tego, żeby pomóc owo rozwiązanie znaleźć lub wyrazić je w sposób przejrzysty i zrozumiały.

Pierwsza z tych historii wiąże się z zaskakującymi, otwartymi, a jednocześnie fundamentalnymi pytaniami, które wciąż zawiera bardzo klasyczna dziedzina: matematyczne podstawy mechaniki Newtona. Dość niedawno, pod sam koniec XX wieku, okazało się na przykład, że w świecie mechaniki newtonowskiej, gdy zaniebamy efekty relatywistyczne, możliwa jest podróż do nieskończoności w skończonym czasie. Może się zdarzyć, że kilka ciał, poddanych wyłącznie działaniu grawitacji, wpadnie w szalony, coraz szybszy taniec; jedno z nich będzie na przemian usiłowało zderzyć się z pozostałymi i bardzo od nich oddalić, ale okaże się, że ani to pierwsze, ani to drugie – ani ostateczne zderzenie, ani trwałe oddalenie na bezpieczną odległość – nie jest możliwe. Brzmi to jak zły scenariusz filmu *science fiction*, zacznijmy więc od czegoś znacznie prostszego.

Chodzi mi o zasadę szufladkową Dirichleta: jeśli do n szuflad włożymy $n + 1$ (lub więcej) listów, to w pewnej szufladzie znajdą się co najmniej dwa listy. Jest to stwierdzenie tak oczywiste, na pozór wręcz banalne, że trudno sobie wyobrazić, by mogło prowadzić do jakichś szczególnie zaskakujących wniosków. Każdy słyszał, że w odpowiednio dużym mieście z pewnością są dwie osoby, które mają tyle samo włosów na głowie (nie potrafiemy jednak łatwo takich osób wskazać), a w każdej szkole, do której chodzi przynajmniej 367 uczniów, na pewno są tacy, którzy obchodzą urodziny tego samego dnia (i nie trzeba uważ-

nie przeglądać wszystkich dzienników, żeby przekonać się, że to prawda).

Spójrzmy na bardziej matematyczny przykład: wśród każdych 501 liczb wybranych spośród 1, 2, ..., 1000 na pewno są dwie takie, z których jedna dzieli drugą bez reszty. Tu akurat nie od razu widać, jak zastosować zasadę szufladkową. Gdybyśmy jednak zapisali każdą z 501 wybranych liczb jako iloczyn pewnej liczby nieparzystej i pewnej potęgi dwójki, tzn. w postaci $2^m \cdot (2l + 1)$, to zauważylibyśmy, że nie wszystkie czynniki nieparzyste są różne. Istotnie, nie mogą być różne, bo jest ich 501, a możliwości wyboru tylko 500, gdyż tylko co druga liczba wśród 1, 2, ..., 1000 jest nieparzysta. Wśród wybranych 501 liczb są więc z pewnością dwie, powiedzmy a i b , które mają ten sam czynnik nieparzysty, tzn.

$$a = 2^m \cdot (2l + 1), \quad b = 2^k \cdot (2l + 1).$$

Jeśli 2^m jest większe niż 2^k (a przecież możemy przyjąć, że tak jest, bo gdyby było na odwrót, to moglibyśmy zamienić oznaczenia obu liczb), to b dzieli a : w liczniku i mianowniku ułamka a/b można skrócić wspólny czynnik nieparzysty, a mniejsza potęga dwójki z pewnością dzieli większą potęgę. Innymi słowy, $a/b = 2^{m-k}$; wynik dzielenia jest całkowity.

Mój ulubiony przykład zastosowania zasady szufladkowej Dirichleta jest w gruncie rzeczy podobny. Różnica polega na tym, że jeszcze mniej oczywiste jest, czym mają być szufladki i jak się nimi posłużyć, a wnioski są, dla wielu osób, bardziej zaskakujące. Chodzi mi o twierdzenie, które orzeka, że każdy skończony, niezaczynający się od zera ciąg cyfr widnieje na początku (tzn. z lewej strony) rozwinięcia dziesiętnego wielu różnych potęg dwójki. Na przykład, data urodzin każdego Polaka (z numerami PESEL i NIP dorzuconymi na dodatek) znajduje się na początku zapisu dziesiętnego nieskończenie wielu potęg dwójki.

To samo można powiedzieć nie tylko o datach. Istnieją układniki n , dla których zapis dziesiętny 2^n zaczyna się od ciągu utworzonego z wypisanych po kolei wszystkich numerów z książki adresowej mojego telefonu komórkowego. Pisząc te słowa, nie

potrafię wprowadzić podać żadnej takiej liczby n , ale mimo to mam uczucie niezachwianej pewności, które nie zawsze towarzyszy mi w życiu. Takie uczucie pewności daje matematykowi dowód. Jedną z radości, których dostarcza obcowanie z matematyką, jest właśnie to, że dzięki dowodom można być pewnym różnych rzeczy nieoczywistych.

Nawet dla ciągów jednocyfrowych teza wspomnianego twierdzenia nie jest oczywista. Gdy zaczniemy wypisywać początkowe cyfry liczb 2^n dla $n = 0, 1, 2, \dots$, to ujrzymy następujący wzór:

1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,
 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,
 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5,
 1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, ...

Siódemka i dziewiątek (na razie) ani śladu, prawda?

Co więcej, komuś niecierpliwemu i nieuważnemu może przyjść do głowy myśl, że ciąg początkowych cyfr potęg dwójki jest okresowy i wszystko w nim powtarza się regularnie, co 10 miejsc. To jednak tylko złudzenie, którego przyczyną jest to, że $2^{10} = 1024$ jest niezłym przybliżeniem liczby 1000. Mnożenie liczby przez 1000 polega przecież na dopisywaniu trzech zer na końcu jej zapisu dziesiętnego i nie ma najmniejszego wpływu na początkowy fragment tego zapisu. Gdy wielokrotnie mnożymy przez 1024, drobne i początkowo niezbyt istotne dodatki z końcowych fragmentów zapisu dziesiętnego zaczynają kumulować się i wzbierać, rozlewając się stopniowo coraz dalej w lewo. Gdybym wypisał wyżej piąty wiersz początkowych cyfr potęg dwójki, to zamiast szóstki byłaby w nim siódemka. Siódemkę zobaczylibyśmy też – na tym samym miejscu! – w kolejnych wierszach, aż do dziesiątego. W jedenastym wierszu miejsce siódemki zajmie ósemka. Obejrzawszy kilkaset takich wierszy po 10 cyfr, można zobaczyć siódemki (i dziewiątki) w różnych miejscach, zjawiające się nieuchronnie, ale w sposób, który trudno uznać za idealnie okresowy.

Aby udowodnić, że siódemka jest początkową cyfrą nieskończenie wielu potęg dwójki, trzeba wyjść poza krąg najprostszych eksperymentów i zrozumieć, co to znaczy, że zapis dziesiętny

liczby 2^n zaczyna się od siódemki. Otóż, jest tak wtedy, gdy 2^n znajduje się między dwiema liczbami: pierwszą z nich jest siódemka z pewną liczbą zer na końcu, a drugą ósemka z taką samą liczbą zer. Wszystkie liczby między tymi dwiema zaczynają się od siódemki. I na odwrót, każdą liczbę, która ma za pierwszą cyfrę siódemkę, można wstawić w jeden z przedziałów o końcach $70 \dots 0$ i $80 \dots 0$ (gdzie zer jest w obu liczbach tyle samo).

Teraz, żeby było poręczniej, użyjmy symboli: 7 jest pierwszą cyfrą liczby 2^n wtedy i tylko wtedy, gdy dla pewnego naturalnego k mamy $7 \cdot 10^k < 2^n < 8 \cdot 10^k$. Aby dostać prostszy, równoważny zapis, zlogarytmujemy te nierówności stronami. Jako podstawę logarytmu wybierzemy 10, bo potęga dziesiątki występuje w naszym warunku aż dwukrotnie. Logarytmując, otrzymujemy $k + \log 7 < n \log 2 < k + \log 8$. Ponieważ liczby $\log 7$ i $\log 8$ należą do przedziału $(0, 1)$, więc k jest częścią całkowitą liczby $n \log 2$, tzn. $k = [n \log 2]$ (nawiasów kwadratowych użyjemy do oznaczania części całkowitej). Odejmując k od uzyskanych nierówności, dostaniemy ostatecznie

$$\log 7 < n \log 2 - [n \log 2] < \log 8.$$

Być może czymś zdaniem to wyrażenie jest bardziej zagadkowe od potocznej frazy *7 jest pierwszą cyfrą liczby 2^n* , ale za to łatwiej jest poddać je analizie. Zanim to zrobimy, zwróćmy uwagę na jedną rzecz. Otóż, logarytmowanie pozwoliło zamienić obserwację potęg dwójki, rosnących bardzo szybko i rozmieszczonych na osi liczbowej w coraz większych odstępach, w analizowanie kolejnych wielokrotności $\log 2$, które rosną znacznie wolniej, a na osi liczbowej rozmieszczone są równomiernie, jak koraliki na sznurku albo słupki kilometrowe przy prostej szosie. Udało się stwierdzić, że poszukiwanie potęg dwójki z pierwszą cyfrą 7 jest tym samym, co sprawdzanie, czy któryś z wyrazów ciągu $a_n := nx - [nx]$, gdzie $x = \log 2$, a $n = 0, 1, 2, \dots$, trafi do przedziału o końcach $\log 7$ i $\log 8$.

Mówiąc nieco mętnie, to trochę tak, jakbyśmy zdołali spojrzeć na badane zjawisko z innej perspektywy, dostrzegając w nim – dzięki doborowi skali lub przyrządu do obserwacji – pewną rów-

nomierność i symetrię. Obserwujemy na osi liczbowej ślady wędrówki kogoś, kto wyruszył z zera i stawia równe kroki długości $x = \log 2$. Interesują nas nie miejsca, gdzie wędrowiec stawiał stopy (to są liczby nx), ale odległości tych miejsc od najbliższych (z lewej strony) liczb całkowitych. Owe odległości to właśnie liczby $a_n = nx - [nx]$.

Gdyby na przykład $x = 41/137$, ciąg a_n części ułamkowych kolejnych wielokrotności x byłby okresowy: wyrazy o numerach różniących się o 137 byłyby równe. Podobnie byłoby dla każdej liczby wymiernej x . Jednak $\log 2$ nie jest liczbą wymierną: gdyby $\log 2 = p/q$, to wprost z definicji logarytmu mielibyśmy $10^{p/q} = 2$, czyli $10^p = 2^q$, co jest niemożliwe (lewa strona dzieli się przez 5, a prawa nie). Kluczową i przełomową dla całego rozumowania konsekwencją niewymierności $x = \log 2$ jest to, że wszystkie wyrazy ciągu a_n są różne. Gdyby bowiem $a_n = a_m$ dla jakichś $n \neq m$, to przekształcając równość $nx - [nx] = mx - [mx]$, zapisalibyśmy x jako ułamek o liczniku i mianowniku całkowitym, $x = ([nx] - [mx])/(n - m)$. Wiemy jednak, że $x = \log 2$ takim ułamkiem nie jest!

Teraz, idąc za ciosem, możemy zrozumieć całą sytuację do końca.

Podzielmy najpierw odcinek $[0, 1]$ na m równych przedziałów, wybierając m tak, żeby długość każdej części była mniejsza niż $\log 8 - \log 7$ (kto posłuży się np. kalkulatorem, zobaczy, że wystarczy w tym celu wziąć $m = 18$; jakkolwiek liczba $m > 18$ też byłaby dobra). Ponieważ liczby a_n są różne, więc któreś dwie spośród $a_1, a_2, \dots, a_{m+1}$ – powiedzmy a_s i a_{s+k} – należą do tego samego przedziału długości $1/m$. (Tu, jak widać, skorzystaliśmy z zasady szufladkowej!)

Jak otrzymać a_{s+k} , gdy znamy a_s ? To nietrudne; obserwujemy wszak wędrowkę równymi krokami po osi liczbowej i mierzymy odstępów śladów wędrowca od ostatniej miniętej liczby całkowitej. Po s krokach wędrowiec znajduje się w punkcie sx , w odległości a_s od ostatniej miniętej liczby całkowitej, którą jest $[sx]$. Gdy zrobi k kolejnych kroków, znajdzie się w punkcie $(s+k)x$, w odległości a_{s+k} od ostatniej miniętej liczby całkowitej, którą jest $[(s+k)x]$. Jednak liczby a_s i a_{s+k} różnią się tylko nieznacznie:

należą však do jednego przedziału długości $1/m$. To zaś oznacza, że odległość kx , jaką przebył wędrowiec, stawiając k kroków, jest sumą pewnej liczby całkowitej, którą nazwiemy l (kto zechce, sprawdzi, że $l = [(k + s)x] - [sx]$, ale to nie jest istotne), i ułamka $u = a_{s+k} - a_s$. Może $u > 0$, a może $u < 0$. Tego nie wiemy, bo nie wiemy, która z liczb a_s i a_{s+k} jest mniejsza, a która większa. Na pewno jednak moduł u nie przekracza $1/m$, bo a_s i a_{s+k} wybraliśmy z tego samego krótkiego przedziału.

Dla wygody wyobraźmy sobie teraz, że oś liczbowa została nawinięta na okrąg długości 1, jak nierozciągliwa nić na szpulkę. W wyniku tej operacji skleione zostały końce odcinka $[0, 1]$, a także wszystkie liczby całkowite. Przesunięciu o x na nitce – osi liczbowej – odpowiada obrót szpulki – okręgu. Jest to obrót o kąt środkowy oparty na łuku długości x . Ponieważ długość całego okręgu jest równa 1, więc nietrudno sprawdzić, że chodzi o kąt $360x$ stopni. Przesunięciu o kx , czyli k -krotnemu przesunięciu o x , odpowiada kolejne wykonanie k takich obrotów, czyli obrót o $360kx$ stopni. Wiemy już, że $kx = l + u$, tzn. $360kx = 360l + 360u$, a obrót o $360l$ stopni dla całkowitego l nic przecież nie zmienia. Na naszej zwiniętej osi liczbowej przejście od a_s do a_{s+k} , a także od jakiegokolwiek a_j do a_{j+k} , polega więc na obrocie o kąt $360u$ stopni. Może w lewo, a może w prawo; tego nie wiemy, gdyż nie wiemy, czy ułamek u jest dodatni, czy ujemny. Dowcip polega jednak na tym, że u ma niewielki moduł i dlatego k wyjściowych obrotów daje obrót o niewielki kąt. Zauważmy: dobierając wcześniej odpowiednio dużą liczbę m , moglibyśmy sprawić, że byłby to obrót o kąt mniejszy od dowolnie ustalonego.

Na szpulce – zwiniętej osi – jest łuczek – przedział $(\log 7, \log 8)$. Dla dowolnego j liczby a_j, a_{j+k}, a_{j+2k} itd. przedzielone są łukami okręgu długości $|u| \leq 1/m$. Ponadto wszystkie te liczby są różne; stwierdziliśmy to już dawno. Moglibyśmy je zaznaczyć ołówkiem, stawiając na okręgu kropki w regularnych odstępach, ułożone tak, jak podziałki na zegarku – tzn. prawie tak, bo wszak zatoczywszy ołówkiem pełne koło, nie trafilibyśmy ponownie w to samo miejsce. Przedział $(\log 7, \log 8)$ jest dłuższy niż odstęp między sąsiednimi kropkami, zatem któraś kropka weń wpadnie.

Jeśli będziemy zaznaczać kropki bez końca, to za każdym pełnym obiegiem co najmniej jedna z nich znajdzie się na łuku między $\log 7$ i $\log 8$. Do przedziału $(\log 7, \log 8)$ należy więc nieskończenie wiele wyrazów ciągu a_n . Innymi słowy, nieskończenie wiele potęg dwójki zaczyna się od 7.

Identyczne rozumowanie można przeprowadzić dla każdego przedziału (a, β) , gdzie $0 \leq a < \beta \leq 1$. Wystarczy tak dobrać liczbę m , żeby „chodzić w kółko odpowiednio drobnymi kroczkami”. Nietrudno stąd wywnioskować – kto zechce, sam dopracuje wszystkie szczegóły uzasadnienia – że każdy skończony ciąg cyfr pojawia się na początku zapisu dziesiętnego nieskończenie wielu potęg dwójki. Siedem siódemek po kolei? Bardzo proszę, liczba 2^{26399} ma w zapisie dziesiętkowym 7947 cyfr i zaczyna się od siedmiu kolejnych siódemek. Mój dzień i miesiąc urodzenia? Bardzo proszę, 19 czerwca; np. $2^{6113890}$ zaczyna się właśnie od cyfr 1, 9, 0 i 6.

Zanim powędrujemy dalej, spójrzmy raz jeszcze na opisane wyżej rozumowanie. Pytanie: *czy potęgi dwójki mogą zaczynać się od siódemki*, brzmi naiwnie i prosto; jednak udzielając odpowiedzi, skorzystaliśmy z logarytmów, dostrzegliśmy ukrytą geometrię (była wszak mowa o przesunięciach i obrotach), odwołaliśmy się do niewymierności liczby $\log 2$ i do zasady szufladkowej. Od pewnego momentu wygodniej było myśleć o wędrowce wzdłuż nitki nawiniętej na szpulkę.

Czy można było postąpić prościej? Owszem, można było po prostu stwierdzić, że $2^{46} = 70\,368\,744\,177\,664$, to jednak nie wyjaśniłoby, dlaczego *nieskończenie wiele* potęg dwójki zaczyna się od siódemki.

Czy można byłoby opisać rozumowanie krócej? Tak, bez wątpienia; wystarczyłoby pisać tylko o tym, co naprawdę w rozumowaniu niezbędne i używać nieco więcej symboli.

Najważniejsze pytanie, jakie może z dystansu postawić laik, brzmi jednak tak: A ile trzeba czasu, żeby na takie rozumowanie *upaść*, i jak się to właściwie robi? Oczywiście konkretna odpowiedź zależy od tego, kto jej udziela. Często po prostu nie można zawczasu określić, ile czasu i jakich środków będzie wymagało rozwiązanie jakiegoś problemu. Między poszukiwaniem

odpowiedzi na nieznane pytanie i szybką lekturą tekstu przedstawiającego odpowiedź, którą znalazł i opisał ktoś inny, różnica bywa w matematyce taka, jak między samodzielnym wędrowaniem przez góry z plecakiem na grzbiecie, w słońcu, deszczu, wietrze i mgle, po nieznanej drodze i z niedokładną mapą, a lekturą paru stron przewodnika w wygodnym fotelu w niedzielne popołudnie, z kubkiem gorącej herbaty stojącym wygodnie pod ręką. . .

No dobrze, przerwie ktoś zniecierpliwiony tanią filozofią, co jednak mają wspólnego pierwsze cyfry potęg dwójki z mechaniką Newtona i z tym, że podobno – jak twierdzi autor – w świecie opisywanym tylko przez nią, z siłą grawitacji proporcjonalną do iloczynu mas i odwrotnie proporcjonalną do kwadratu odległości, z prędkościami, które można zwyczajnie dodawać, bez żadnych komplikacji i ograniczeń, wynikających z istnienia prędkości światła, możliwa jest (przy odpowiednim doborze mas i prędkości początkowych) ucieczka do nieskończoności w skończonym czasie, czyli zjawisko, które zarówno w oczach astronoma, jak i zwykłego śmiertelnika jest praktycznie tożsame z ostateczną katastrofą obserwowanego układu?

Podobieństwo polega na tym, że opis matematyczny obu zjawisk ma pewne cechy wspólne, ukryte pod powierzchnią. W przykładzie z potęgami dwójki ważne było stwierdzenie, że obserwację początkowych fragmentów zapisu dziesiętnego liczb 2^n można zastąpić śledzeniem śladów kogoś, kto wędruje po okręgu długości 1 krokami długości $\log 2$. Potem wystarczyło zauważyć, że wszystkie ślady wędrowca są różne, i skorzystać z tego, że obrót okręgu jest przekształceniem wzajemnie jednoznacznym, zachowującym naturalną *miarę* wielkości podzbiorów okręgu, czyli długość łuku. Jest to tak oczywista własność obrotu, że można przeczytać całe powyższe rozwiązanie i nie dostrzec, że odgrywa w nim ona kluczową rolę. Jednak samo rozumowanie jest na tyle ogólne, że stanowi wzorzec postępowania w innych, znacznie ogólniejszych i bardziej abstrakcyjnych sytuacjach.

O tym spróbuję opowiedzieć najpierw, zostawiając opisy grawitacyjnych katastrof na zakończenie.

Matematyczny opis ruchu wielu ciał pod wpływem grawitacji wymaga odwołania się do równań różniczkowych. Na każde z n ciał działa siła, która jest wypadkową $n - 1$ sił przyciągania ze strony każdego z pozostałych $n - 1$ ciał. Siła, zgodnie ze znaną ze szkoły drugą zasadą dynamiki Newtona, nadaje przyspieszenie. Znając masy i położenia ciał w danej chwili, można to przyspieszenie wyrazić niezbyt skomplikowanym wzorem. Żeby zamknąć opis i otrzymać równania, z których (teoretycznie przynajmniej) będzie można wyznaczyć położenie każdego z ciał jako funkcję czasu, trzeba tylko wiedzieć, że przyspieszenie to druga pochodna położenia. Równań różniczkowych rozwiązywać tu nie będziemy. Można czytać cały tekst, nie rozumiejąc precyzyjnego znaczenia słów *druga pochodna*. Wystarczy po prostu pamiętać, że przyspieszenie określa, w jakim tempie zmienia się wektor prędkości chwilowej, a prędkość chwilowa wiernie opisuje zmiany położenia. Ktoś, kto zna przyspieszenie poruszającego się ciała i chciałby wiedzieć, jak zmienia się położenie, musi dwukrotnie wykonać tę samą operację (którą matematyk nazywa całkowaniem): najpierw odtworzyć prędkość, a potem określić zależność położenia od czasu. Dodatkowa trudność matematyczna polega na tym, że prawo grawitacji nie daje wcale jawnego wzoru na przyspieszenie: znamy jedynie zależność przyspieszenia każdego z ciał od położenia pozostałych ciał i musimy tę zależność rozwikłać.

Podobieństwo zagadnienia n ciał (zwanego też problemem n ciał) do przykładu z potęgami dwójki kryje się w geometrii opisu. Aby wiernie opisać ruch n ciał w przestrzeni trójwymiarowej, trzeba wiedzieć, jak $3n$ funkcji współrzędnych (na każde z ciał przypadają trzy) zależy od czasu. Pełna znajomość tych funkcji umożliwia podanie zarówno położenia ciał, jak i ich prędkości w każdej chwili czasu. Wyobraźmy sobie teraz, że w ustalonej chwili czasu t tworzymy listę $6n$ liczb, wypisując trzy współrzędne położenia każdego z ciał i trzy współrzędne wektora prędkości (6 liczb dla każdego ciała). Matematyk spojrzy na taką listę jak na określenie pewnego punktu w przestrzeni euklidesowej, która ma $6n$ wymiarów – tyle, ile jest liczb.

Przestrzeń $6n$ -wymiarowa!? Cóż to za bzdura, coś za fantastyczny dziwoląg, produkt czyjejś chorej wyobraźni? Przecież przestrzeń ma trzy wymiary, co każdy wie i widzi. . .

Owszem, przestrzeń wokół nas *sprawia* na co dzień takie samo wrażenie, jak trójwymiarowa przestrzeń euklidesowa z gimnazjalnych czy licealnych lekcji geometrii. Jednak zmysły nie są ostatecznym sędzią trafności przyjmowanych założeń, także gdy chodzi o geometrię i jej okolice – w końcu kiedyś niemal wszyscy byli przekonani, że Ziemia jest płaska. Poza tym, naprawdę chodzi o coś innego. Każdy, kto w liceum czy gimnazjum otarł się o geometrię analityczną, albo choćby o samo pojęcie układu współrzędnych na płaszczyźnie, pogodził się z tym, że para liczb – *współrzędnych* – określa jednoznacznie pewien punkt płaszczyzny. Równania, w których występują współrzędne punktów, mogą opisywać najróżniejsze krzywe. Podobnie jest z przestrzenią trójwymiarową: można w niej wprowadzić kartezjański układ współrzędnych. Każda uporządkowana trójka liczb rzeczywistych będzie wtedy stanowić współrzędne pewnego punktu przestrzeni. Co więcej, można trójki liczb utożsamiać z punktami przestrzeni i posługiwać się takim sposobem opisu, jaki w danej chwili jest wygodniejszy.

Matematyk bez wahania uznaje, że tak samo można postąpić z uporządkowanymi czwórkami, piątkami, czy n -tkami liczb: można przyjąć, że są one tym samym, co punkty przestrzeni euklidesowej, która ma cztery, pięć, czy n wymiarów. Nie przeszkadza mu, że ktoś będzie się upierał, że takiej przestrzeni *nie ma* (przecież jest, bo właśnie została zdefiniowana; powiedzieliśmy, czym są jej punkty), albo że jej *nie widać* (coż z tego? to nie uniemożliwia badania geometrycznych własności różnych podzbiorów takiej przestrzeni).

Co więcej, często wygodnie jest widzieć cały układ syntetycznie, od razu i za jednym zamachem, a nie rozłożony na mniejsze, na pozór prostsze, elementy. Oto banalny przykład. Trajektorię, po której porusza się lotniarz, kołując w pogodny dzień wysoko nad ziemią, można oczywiście wiernie przedstawić, wykreślając każdą z trzech współrzędnych lotniarza (długość geograficzną, szerokość geograficzną i wysokość mierzona względem poziomu